

На правах рукописи



Skoltech

Короткевич Александр Олегович

Моделирование нелинейных волн в задачах теоретической физики

Специальность 1.3.3 —
«Теоретическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2026

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки «Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук». Диссертация подготовлена в Автономной некоммерческой образовательной организации высшего образования «Сколковский институт науки и технологий».

Официальные оппоненты: **Балакин Алексей Антониевич**,
доктор физико-математических наук,
Институт прикладной физики Российской академии наук, ведущий научный сотрудник

Зубарев Николай Михайлович,
доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН,
Институт электрофизики Уральского отделения Российской академии наук, главный научный сотрудник

Розанов Николай Николаевич,
доктор физико-математических наук, академик РАН,
Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук, главный научный сотрудник

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт океанологии им. П.П. Ширшова Российской академии наук»

Защита состоится 2 октября 2026 г. в 12 часов на заседании диссертационного совета Д 24.1.128.01 при Институте теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук по адресу: 142432, МО., г. Черноголовка, просп. Академика Семенова, д. 1А.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук или на сайте диссертационного совета <https://www.itp.ac.ru/ru/dissertation-council/>.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 142432, МО., г. Черноголовка, просп. Академика Семенова, д. 1А, ученому секретарю диссертационного совета Д 24.1.128.01.

Автореферат разослан **DD mmmmmmm**2026 года.
Телефон для справок: +7 (495) 702-93-17.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 24.1.128.01,
д-р физ.-мат. наук

Адлер Всеволод Эдуардович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Распространение волн является одним из самых часто наблюдаемых феноменов в физике. В большинстве реалистичных моделей поведение волны является нелинейным. Нелинейность в задаче одновременно делает её и более сложной, и более богатой в смысле наблюдаемых физических явлений. Данная работа не ставит своей целью всеобъемлющее описание различных проявлений нелинейного поведения в волновых процессах. Существует огромное количество книг, посвящённых вопросу, начиная от классического труда Уизема [1] до современных учебников [2] и справочников [3] по нелинейным волнам или специализированных трудов, подробно описывающих современное состояние какого-либо раздела данного направления науки, как, например, физики диссипативных солитонов [4]. При всей широте применения теории нелинейных волн к физическим явлениям математический аппарат и используемые модели зачастую являются сходными. Во многих приложениях можно использовать приближение слабой нелинейности, когда нелинейные процессы являются относительно малой поправкой на фоне линейного поведения. Слабонелинейное детерминистское описание волнового поля в большинстве случаев опирается на стандартный набор методов, в частности, на приближение огибающей (особенно часто в оптике, магнитных явлениях и физике плазмы), гамильтонов формализм, разложение на плоские волны. В специальных случаях могут использоваться методы теории солитонов [5; 6]. Для статистического описания волнового поля одним из стандартных подходов является использование кинетического уравнения для волн [7] и основанной на нём теории волновой турбулентности [8], которая должна являться частью любого современного учебника по физической кинетике. Применение классического аппарата методов теории конденсированного состояния и статистической физики приводит к прямым аналогиям между классическими и квантовыми системами в теории конденсированного состояния вещества и появлению таких терминов, как «мезоскопическая турбулентность» [9] для описания специфического поведения классических неравновесных нелинейных систем, описывающих волновую турбулентность.

В данной работе стандартные методы теории нелинейных волн применяются к нелинейным волновым явлениям в различных средах. А именно к задачам классической теории поля в рамках электродинамики классических и квантовых сред, к задачам физической кинетики, к задачам теории конденсированного состояния в области классических жидкостей, неравновесных систем и волновой турбулентности. Все эти направления исследований соответствуют паспорту специальности 1.3.3 «Теоретическая физика». На примерах работ автора демонстрируется общность подходов, несмотря на существенно разную физику в решаемых задачах. Модели, используемые для описания нелинейных волн в различных средах, имеют общие черты и общие методы решения как

аналитические, так и численные. В теории нелинейных волн, в силу сложности аналитического аппарата, особенно выпукло проявляется эффективность связки численных методов решения, дающих дополнительную интуицию и информацию о задаче с последующим аналитическим объяснением явлений, наблюдаемых в численном или натурном эксперименте.

Одной из простейших моделей для описания нелинейного взаимодействия волн является ограничение рассмотрения несколькими взаимодействующими частотами. Хорошим примером такого подхода является задача о распространении нескольких электромагнитных волн в плазме. Эта задача имеет непосредственное отношение к обеспечению связи с гиперзвуковым телом через плазменное «одеяло», формирующееся при входе в плотные слои атмосферы [10]. Можно рассмотреть отдельно падающий сигнал на частоте ниже плазменной и поэтому быстро затухающий при распространении вглубь от поверхности. Найденное поле используется для вычисления малой поправки к профилю плотности носителей в плазменном слое. После чего уже можно решить задачу о рассеянии волны накачки на частоте выше плазменной, исходящей от корабля, на этих возмущениях плотности. В результате часть падающей волны накачки будет отражаться назад к кораблю, неся информацию об исходном сигнале на частоте ниже плазменной. Очевидно, что данный нелинейный процесс довольно слаб, поэтому необходимо выяснить, возможно ли на современном уровне техники принять отражённый от вариаций плотности сигнал на разностной частоте. Похожий подход можно использовать для распространения волн на разных частотах в других системах, в частности, поверхностных магнитостатических спиновых волн в железо-иттриевом гранате. Одна волна модуляционно устойчива. Однако в оптике известно явление фазовой кросс-модуляции [11], когда при устойчивой к модуляционной неустойчивости одной волне для одновременно распространяющихся двух волн можно наблюдать модуляционную неустойчивость. В эксперименте для поверхностных магнитостатических спиновых волн в железо-иттриевом гранате подобное явление наблюдалось, но аналитическое описание отсутствовало. Фактически здесь происходит явление, в чём-то сходное с описанным выше распространением электромагнитных волн на разных частотах в плазме. Волна на одной частоте изменяет дисперсионный закон для волны на другой частоте из-за малой нелинейной поправки в высокочастотную намагничённость. При выполнении условий на амплитуды волн и разность частот одновременно распространяющихся волн, как оказывается, можно выполнить условия для возникновения модуляционной неустойчивости.

Решение Стокса [12; 13] для гравитационных волн на поверхности жидкости было первым в только зарождающейся теории нелинейных волн. Оно описывает одномерную пространственно периодическую волну, движущуюся с постоянной скоростью без изменения формы, и является важным с прикладной точки зрения, т.к. даёт разумное приближение для профиля волн, слабо зависящих от координаты вдоль гребня. В то же время, такое упрощение (слабая зависимость от одной из координат вдоль поверхности жидкости) позволяет

использовать всю мощь теории функций комплексной переменной и получить сильные аналитические результаты. В частности, уже в первых работах Стокс показал, что существует максимальная амплитуда такого решения, т.н. предельная волна Стокса, при достижении которой на поверхности появляется особенность: разрыв первой производной, дающий угол 120 градусов на гребне волны. Вопрос, как именно мы приближаемся к предельной волне Стокса от линейной синусоидальной волны, активно интересовал сообщество (см. обзор ранних работ в книге [14]), однако исследовать в подробностях его начали только в 70-х годах прошлого века, в том числе с развитием вычислительной техники. Надо отметить, что данный вопрос имеет не только фундаментально-научный интерес, но и важен для понимания таких явлений, как формирование и разрушение т.н. "волн-убийц"-[15], имеющих непосредственное отношение к оценке рисков для безопасности морских перевозок. Рост возможностей современных ЭВМ и совершенствование алгоритмов вычислительной математики позволили внести существенный вклад и в эту задачу полуторавековой давности.

В конце 1960-х годов В. Е. Захаровым и другими была предложена теория волновой турбулентности [7], основывающаяся на кинетическом уравнении для волн. Это общий подход, который может применяться в слабонелинейных системах для описания динамики функции распределения волнового поля. Найденные в ранних работах [16; 17] точные решения кинетического уравнения, соответствующие постоянным потокам сохраняющихся величин, открыли новую страницу в истории исследования турбулентности. Однако вопросы, для каких систем и при каких условиях применимо кинетическое уравнение для волн, оставались слабо исследованными. Всё дело в чрезвычайной сложности аналитического исследования даже изначальных нелинейных динамических уравнений, не говоря уже о кинетическом уравнении. Ситуация изменилась только сравнительно недавно, в 1990-х годах с развитием вычислительной техники и методов численного моделирования. Начиная с пионерской работы Пушкарёва и Захарова [18], появились первые численные подтверждения теории волновой турбулентности, поддержанные работами других авторов [19–21]. И тем не менее, к примеру, несмотря на использование кинетического уравнения Хасельманна [22] (частный случай кинетического уравнения для гравитационных волн на поверхности жидкости) и его модификаций практически во всех моделях предсказания ветрового волнения, ясности с диапазоном параметров, когда оно является применимым, не было. В ряде экспериментальных работ, особенно на открытой воде, наблюдался спектр Захарова-Филоненко для гравитационных волн [23; 24], при этом в гораздо лучше контролируемых экспериментах в волновых бассейнах получались неоднозначные результаты [25]. Таким образом, вопрос о применимости кинетического уравнения для волн к конкретной системе и об учёте влияния явлений, явно не описываемых столкновительным членом кинетического уравнения (например, когерентных структур, редких явлений),

посредством введения дополнительных феноменологических членов остаётся открытым.

Целью данной работы является исследование распространения нелинейных волн в различных средах с последующим применением полученных результатов к фундаментальным, прикладным и инженерным задачам.

Для достижения поставленной цели были сформулированы и решены следующие **задачи**:

1. Исследовать аналитически и численно эффективность нелинейного взаимодействия электромагнитных волн в плазме, окружающей гиперзвуковой аппарат при входе в плотные слои атмосферы.
2. Построить модель одновременного распространения двух поверхностных магнитостатических спиновых волн в железо-иттриевом гранате.
3. Провести исследование распространения световых импульсов в оптических средах (брэгговской решётке с нелинейным взаимодействием в рамках модели Максвелла-Даффинга и в активной среде с Λ -конфигурацией уровней в рамках модели Максвелла-Блоха) с обобщением на распространение света в противоположных направлениях, что является характерным для метаматериалов.
4. Выполнить исследование влияния рассеяния Манделъштамма-Бриллюэна на распространение мощного лазерного излучения в плазме на примере условий характерных для установки лазерного термоядерного синтеза National Ignition Facility (NIF) в Ливерморской национальной лаборатории (США).
5. Исследовать нелинейные периодические решения уравнений двумерной гидродинамики для волн на поверхности несжимаемой идеальной жидкости, обусловленных гравитацией, известных как волны Стокса.
6. Исследовать распространение гравитационных и капиллярных волн на поверхности трёхмерной жидкости в приближении слабой нелинейности путём численного моделирования.
7. Изучить особенности моделирования гравитационных волн на дискретной сетке волновых векторов, обусловленной конечностью системы.
8. Исследовать влияние упомянутых выше особенностей на физические параметры описания волнового поля, к примеру, на дисперсионный закон.
9. Рассмотреть механизмы взаимодействия волн и их влияние на нелинейные процессы, в частности, процессы затухания волнового спектра и сдвига спектрального максимума в длинноволновую область.
10. В рамках статистического подхода к описанию волнового поля исследовать границы применимости кинетического уравнения аналитически и численно, для чего провести прямое сравнение с описанием в рамках изначальных динамических уравнений.
11. Провести численное моделирование формирования прямого и обратного каскадов турбулентности гравитационных волн в рамках модели

с накачкой и сравнить результаты с соответствующими решениями Колмогорова-Захарова.

При всём разнообразии рассмотренных в диссертационной работе задач все они связаны с исследованием распространения нелинейных волн в различных средах. В большинстве задач используется приближение слабой нелинейности. Единственной задачей, где нелинейность не может считаться слабой, является получение волн Стокса и исследование их устойчивости. Тем не менее, данная задача естественно связана с большой группой задач о распространении волн на поверхности жидкости. Во многих случаях для описания системы используется гамильтонов формализм. При описании динамики спектральной функции распределения используется кинетическое уравнение для волн.

Научная новизна: В рамках работы было впервые:

1. Проведено численное моделирование и аналитическая оценка эффективности генерации волны на разностной частоте в неоднородной плазме, окружающей гиперзвуковое тело при входе в плотные слои атмосферы.
2. Выведены и исследованы уравнения, описывающие одновременное распространение двух магнитостатических спиновых волн в железитриевом гранате.
3. Исследовано численно и аналитически распространение световых импульсов в брэгговской решётке с нелинейным взаимодействием в рамках модели Максвелла-Даффинга с обобщением на распространение света в противоположных направлениях.
4. Исследовано численно распространение световых импульсов в активной среде с Λ -конфигурацией уровней в рамках модели Максвелла-Блоха с обобщением на распространение света в противоположных направлениях.
5. Проведено массивное численное моделирование неустойчивости, ассоциированной с рассеянием Мандельштамма-Бриллюэна, с накоплением ансамбля реализаций. Продемонстрирована численно новая коллективная мода неустойчивости и исследовано её взаимодействие с известной модой получаемой из приближения случайной фазы.
6. Вычислена с высокой точностью и опубликована для научного сообщества библиотека Стоксовых волн на поверхности глубокой жидкости.
7. Исследована супергармоническая неустойчивость волн Стокса. Детально исследована вторая и впервые достигнута третья ветви неустойчивости. На основании полученных данных предложены универсальные зависимости инкрементов супергармонической неустойчивости всех ветвей вблизи порога появления и вдали от него.
8. Исследована численно и аналитически кольцевая неустойчивость стоячих волн на поверхности жидкости.
9. Промоделировано и исследовано одновременное формирование прямого и обратного каскадов турбулентности гравитационных волн на

поверхности трёхмерной жидкости в рамках изначальных слабонелинейных динамических уравнений. Изучено взаимное влияние этих каскадов.

10. Обнаружено образование сильного длинноволнового фона (конденсата) для гравитационных волн в конечных системах.
11. Изучено влияние конденсата на дисперсионное соотношение и спектры прямого и обратного каскада гравитационных волн на поверхности жидкости.
12. В рамках динамических уравнений исследована динамика волнового спектра гравитационных волн при сдвиге его пика в область длинных волн. Полученные данные применены для верификации некоторых моделей затухания зыби.
13. В рамках одномерного шестиволнового нелинейного уравнения Шрёдингера исследована применимость соответствующего кинетического уравнения для описания динамики статистики волнового поля.

Методология и методы исследования. Для решения поставленных задач используется комбинация численных и аналитических методов современной теории нелинейных волн. В частности, из аналитических методов применялись приближение огибающей для задач, описывающих распространение оптических импульсов и электромагнитных волн в плазме, гамильтонов формализм, полностью нелинейные уравнения для волн на поверхности двумерной жидкости в случае волн Стокса в виде уравнений на динамику конформного отображения, слабонелинейные динамические уравнения для волн на поверхности трёхмерной жидкости, кинетическое уравнение для волн, диффузионное приближение для волнового кинетического уравнения. Используемые численные методы в большинстве своём были неявными по времени и псевдоспектральными по координате, широко использовался метод расщепления операторов. В некоторых случаях применялась одна из модификаций метода характеристик. Краевые задачи решались методом дифференциальной прогонки. Для работ, описывающих волновую турбулентность волн на поверхности жидкости, использовался метод гамильтоновского интегрирования. Во всех численных методах контролировалось сохранение как минимум части имевшихся интегралов движения.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. С гиперзвуковыми аппаратами при вхождении в плотные слои атмосферы, когда формирующееся вокруг тела плазменное облако препятствует связи на сравнительно низких частотах, применим способ связи, основанный на использовании нелинейного взаимодействия волн в плазме, что доказано путём аналитических оценок и численного моделирования.
2. Две поверхностные магнитостатические спиновые волны, одновременно распространяющиеся, к примеру, в железо-иттриевом гранате, в результате фазовой кросс-модуляции становятся модуляционно

- неустойчивыми при преодолении некоторого порога, величина которого получена из развитой теории.
3. Для оптических импульсов, распространяющихся в Брэгговских решётках с нелинейным взаимодействием в противоположных направлениях и описываемых моделью Максвелла-Даффинга, существует точное решение в виде уединённой волны, которое является притягивающим.
 4. В ситуации характерной для метаматериалов с отрицательным показателем преломления, в активной среде с Λ -конфигурацией уровней, описываемой в рамках модели Максвелла-Блоха, возможно распространение световых импульсов и возникновение явления самозахвата сигнала через нелинейное взаимодействие.
 5. Существует новый механизм коллективной неустойчивости при распространении мощного лазерного излучения в плазме, характерной для установок лазерного термоядерного синтеза, что подтверждено массивным численным моделированием.
 6. Волны Стокса, близкие к предельным, не только являются неустойчивыми, но количество неустойчивых мод быстро растёт при приближении к предельной волне Стокса, что продемонстрировано численным моделированием. Библиотека полученных волн Стокса, недостижимых ранее, доступна для сообщества на открытом ресурсе в сети Интернет.
 7. Существует кольцевая неустойчивость гравитационных и капиллярных стоячих волн на поверхности трёхмерной жидкости, которая продемонстрирована численно и для которой построена аналитическая теория.
 8. Закон дисперсии гравитационных волн на поверхности трёхмерной жидкости в присутствии сильного длинноволнового фона (конденсата) существенно изменяется даже при сравнительно узкой ширине спектральной линии. Применимость классических решений Колмогорова-Захарова в виде спектров прямого и обратного каскадов в конечных системах в присутствии конденсата ограничена.
 9. Используемые рядом моделей предсказания ветрового волнения зависимости затухания волнового спектра от крутизны (меры нелинейности) при смещении в область длинных волн существенно переоценивают данный эффект, что показано прямым измерением этого затухания при различных крутизнах.
 10. Существует новый режим волновой турбулентности в конечных системах – мезоскопическая турбулентность, являющийся промежуточным состоянием между почти линейными волнами и режимом, хорошо описываемым кинетическим уравнением для гравитационных волн (уравнение Хассельманна). В данном режиме сохраняется качественное соответствие детерминистического описания в рамках динамических уравнений и статистического описания в рамках уравнения Хассельманна.

11. Для модели шестиволнового одномерного нелинейного уравнения Шрёдингера условия применимости описания параметров волнового поля кинетическим уравнением для имеют пороговый характер, что продемонстрировано прямым численным моделированием.
12. При одновременном формировании спектров прямого и обратного каскадов волновой турбулентности для гравитационных волн на поверхности трёхмерной жидкости образуется сильный длинноволновый фон (конденсат). Его присутствие приводит к изменению спектра прямого каскада от спектра Захарова-Филоненко до спектра Филлипса. Представлен возможный механизм данного явления.
13. Сильная и слабая турбулентности для гравитационных волн на поверхности трёхмерной жидкости могут сосуществовать.
14. Наличие конденсата в гравитационных волнах приводит к существованию нового универсального спектра обратного каскада, что наблюдается при моделировании в рамках динамических уравнений и может быть объяснено в рамках кинетического уравнения для волн (Хассельманна).

Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми. В случаях, когда они развивают и обобщают результаты, полученные ранее другими авторами, в тексте проводится сопоставление с предыдущими результатами и даются необходимые ссылки. Такое сопоставление одновременно дополнительно подтверждает достоверность представленных результатов.

Достоверность полученных результатов обеспечивается как контролем точности использованных численных и аналитических методов, так и сравнением с результатами работ других авторов, а также с данными натурных и численных экспериментов.

Практическая значимость. Полученные в диссертационной работе результаты и развитые методы имеют значительное прикладное значение и важны для фундаментальной науки в применении к описанию динамики слабо нелинейных волн в различных средах. Сформированный теоретический задел является хорошей отправной точкой для дальнейших исследований и стимулирует развитие теории нелинейных волн и её приложений, таких как теория волновой турбулентности, предсказание ветрового волнения и других.

Полученные результаты или могут быть применены для анализа и объяснения экспериментальных данных, или служат мотивацией для новых экспериментов. В ряде случаев такие экспериментальные данные уже доступны, и сравнение показывает хорошее согласие теории и эксперимента. В остальных случаях предсказанные эффекты позволяют спланировать новые эксперименты, потенциально проясняющие ряд неразрешённых вопросов современной теории нелинейных волн.

Численное и аналитическое исследование распространения электромагнитных волн в плазме, окружающей тела, входящие с космическими скоростями в атмосферу, позволяет предложить одно из решений проблемы временного

пропадания радиосвязи с пилотируемыми космическими аппаратами при возвращении на Землю.

Развитая теория фазовой кросс-модуляции поверхностных магнитостатических спиновых волн используется для объяснения данных эксперимента одновременного распространения поверхностных волн на двух частотах в железо-иттриевом гранате.

Исследование распространения света в брэгговских решётках с нелинейностью и в среде с Λ -конфигурацией уровней, при наличии волн, распространяющихся в обоих направлениях, позволяет предложить эксперименты в метаматериалах с отрицательным эффективным показателем преломления, а также рассмотреть возможные применения обнаруженных эффектов для проектирования перспективных оптических устройств.

Подтверждение существования новой коллективной неустойчивости при распространении мощного лазерного излучения в плазме позволило рекомендовать изменения в установке для лазерного управляемого теормоядерного синтеза, снижающие вероятность катастрофического повреждения оптической системы.

Получение и предоставление научному сообществу библиотеки волн Стокса различной амплитуды, вычисленных с высокой точностью, а также исследование их неустойчивости не только открывает новые возможности для развития теории гравитационных волн на воде, но и предоставляет эффективный инструмент тестирования новых кодов для моделирования нелинейных волн на поверхности жидкости.

Открытие и исследование неустойчивости стоячей волны на поверхности жидкости позволило предложить новые экспериментальные техники по возбуждению изотропного волнового поля, что является одной из стандартных постановок для экспериментов по верификации теории волновой турбулентности.

Прямое измерение дисперсионного закона волн и ширины спектральной линии в присутствии конденсата дало возможность указать на ограниченность применимости кинетического уравнения Хассельманна к конечным системам.

Измерение затухания для гравитационных волн, обусловленного микрообрушениями, позволяет продвинуться в направлении теории, описывающей феноменологические члены диссипации в кинетическом уравнении Хассельманна, характерные для моделей ветрового волнения. В частности, показано, что ряд предложенных форм диссипативных членов существенно переоценивает вклад данного механизма.

Открытие мезоскопической волновой турбулентности и сосуществования сильной и слабой волновой турбулентности позволило объяснить расхождение результатов моделирования в рамках кинетического уравнения Хассельманна и экспериментов по наблюдению ветрового волнения.

Наблюдение одновременного формирования прямого и обратного турбулентных каскадов для гравитационных волн позволило подтвердить применимость теории волновой турбулентности Захарова и осуществимость решений Колмогорова-Захарова как минимум в некотором диапазоне параметров волнового поля.

Открытие аналитического объяснения нового универсального спектра обратного каскада гравитационных волн в присутствии конденсата позволило объяснить ряд экспериментальных наблюдений и прояснить характер главенствующих нелинейных процессов в конечных системах, в частности, в лабораторных волновых бассейнах.

Детальное исследование применимости кинетического волнового уравнения в случае шестиволнового взаимодействия, применимого для описания динамики спектральной функции распределения для волн в волоконно-оптических линиях связи, дало возможность понять механизмы проявления нарушения предположений, в которых выводится кинетическое уравнение для волн. В свою очередь, это позволяет продвинуться к лучшему пониманию применимости кинетического уравнения для волн в общем смысле, включая кинетическое уравнение Хассельманна, являющееся основанием для моделей предсказания ветрового волнения.

Апробация работы. Основные результаты, представленные в диссертации, докладывались и обсуждались на международных конференциях: «The 8th International Conference on Ferrites (ICF8)» (Киото, Япония, 2000), «Topical Problems of Nonlinear Wave Physics» (Санкт-Петербург – Нижний Новгород, Россия, 2005), «SIAM Conference on Nonlinear Waves and Coherent Structures» (Сиэтл, Вашингтон, США, 2006; Филадельфия, Пеннсилвания, США, 2010; Сиэтл, Вашингтон, США, 2012; Кэмбридж, Великобритания, 2014; Филадельфия, Пеннсилвания, США, 2016; Анахайм, Калифорния, США, 2018; Бремен, Германия, 2022), «Frontiers of Nonlinear Physics» (Нижний Новгород – Саратов – Нижний Новгород, Россия, 2007), «AMS Fall Western Section Meeting» (Альбукерке, Нью-Мексико, США, 2007; Тусон, Аризона, США, 2012), «Solitons, Collapses and Turbulence: Achievements, Developments and Perspectives» (Черноголовка, Россия, 2007, 2009, 2014; Ярославль, Россия, 2019), «IMACS International Conference on Nonlinear Evolution Equations and Wave Phenomena: Computation and Theory» (Афины, Джорджия, США, 2009, 2013, 2015, 2017, 2019, 2022), «International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics» (Ретимно, Крит, Греция, 2009; Халкидики, Греция, 2011), «AMS Spring Western Section Meeting» (Альбукерке, Нью-Мексико, США, 2010, 2014, 2021 (онлайн)), «Frontiers in Nonlinear Waves» (Тусон, Аризона, США, 2010), «Landau Days» (Черноголовка, Россия, 2010, 2011, 2013, 2015, 2022), «International Congress on Industrial and Applied Mathematics» (Ванкувер, Канада, 2011), научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике (Москва, Россия, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2019, 2020, 2021, 2022), «IUGG Conference on Mathematical Geophysics» (Эдинбург, Великобритания, 2012), «Nonlinear Waves in Fluids»

(Лафборо, Великобритания, 2012), «Wave Interactions and Turbulence» (Торонто, Канада, 2013), «AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications» (Орландо, Флорида, США, 2016), «Theoretical and Computational Aspects of Nonlinear Surface Waves» (Банфф, Альберта, Канада, 2016), «Joint Mathematics Meetings» (Сан Диего, Калифорния, США, 2018), «SIAM Conference on Application of Dynamical Systems» (онлайн, США, 2021), «SIAM Annual Meeting» (онлайн, США, 2021), на семинарах в ИТФ им. Л. Д. Ландау РАН (Черноголовка, Россия), ИФТТ РАН (Черноголовка, Россия), Сколковском институте науки и технологий (Москва, Россия), институте автоматизированного проектирования РАН (Москва, Россия), в Аризонском университете (Тусон, Аризона, США), в Нью-Мексиканском университете (Альбукерке, Нью-Мексико, США), в Центре нелинейных исследований, Лос-Аламосской национальной лаборатории (Лос-Аламос, Нью-Мексико, США), в Политихническом институте Ренселлэра (Трой, Нью-Йорк, США), в Южно-Методистском университете (Даллас, Техас, США), в Массачусетском технологическом институте (Кэмбридж, Массачусетс, США), в университете Говарда (Вашингтон, округ Колумбия, США), в университете Иллинойса в Урбана-Шампейн (Урбана-Шампейн, Иллинойс, США), в Вашингтонском университете (Сиэтл, Вашингтон, США), в университете Кот-д'Азур (Ницца, Франция), в университете штата Нью-Йорк в Баффало (Баффало, Нью-Йорк, США), в институте математических наук им. Куранта при Нью-Йоркском университете (Нью-Йорк, Нью-Йорк, США), в университете Мэриленда (Колледж-Парк, Мэриленд, США).

Основные результаты по теме диссертации изложены в 20 печатных изданиях, 5 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 20 — в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus.

Личный вклад. Вклад автора в работах с соавторами был одним из определяющих. В 14 работах по теме диссертации автор единственный или первый автор. Во всех работах автор участвовал в анализе результатов. В дополнение к сказанному, остановимся подробнее на вкладе автора в каждую из совместных работ. В частности, в работе [A1] автор как участвовал в выводе аналитических результатов, так и разработал, реализовал и применил все численные методы, в [A2] автором получены все аналитические результаты, в [A3; A4] автор разработал, реализовал и применил все численные методы и участвовал в выводе аналитического решения, в [A5] автором разработаны и созданы все коды и выполнялось руководство вычислительной частью, в [A6] автор разработал, реализовал и применил код для численного моделирования в рамках двумерной модели и выполнил всю обработку численных данных, в [A7] автором разработаны первоначальные версии кода и выполнялось руководство всей вычислительной частью, в [A8] автором разработаны и воплощены все вычислительные коды, а также выполнено всё численное моделирование, в [A9] автор разработал все коды и выполнил численное моделирование, участвовал в аналитической части и открыл кольцевую неустойчивость стоячих волн, в [A11]

автором подготовлены все коды и выполнено численное моделирование, в [A12] автор выполнял руководство вычислительной частью, выполнил моделирование для поверхности трёхмерной жидкости используя код, разработанный им же ранее, произвёл всю обработку данных, в [A13] автором выполнено всё численное моделирование с использованием им же разработанного кода и обработка всех данных, в [A14] автор разработал, воплотил в коде и применил в вычислениях алгоритм для моделирования кинетического уравнения, произвёл вычисление корреляторов по данным из динамических уравнений, в [A17; A18] автором применялся для моделирования волн на поверхности трёхмерной жидкости ранее разработанный им код для динамических уравнений, в [A20] автор анализировал данные своих же ранее произведённых вычислений и принял равное участие в аналитической части работы.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность исследований, проведённых в рамках диссертации, приведён обзор литературы по изучаемой проблеме, сформулирована цель и поставлены задачи работы, обоснована научная новизна и практическая значимость произведённых исследований, раскрыто содержание работы по главам.

Первая глава посвящена простейшим подходам в моделировании нелинейных волн, которые, тем не менее, позволяют эффективно решать некоторые актуальные и практически важные задачи.

В частности, в разделе 1.1 рассматривается задача о связи с гиперзвуковым аппаратом при вхождении в плотные слои атмосферы, окружённым плазменным облаком. Нелинейное взаимодействие электромагнитных волн в плазме моделируется посредством последовательного решения линейных задач. Для этого используется разница в амплитудах различных волн и соответственно приближение слабости их взаимного влияния. К примеру, при рассмотрении проблемы связи с гиперзвуковым аппаратом посредством электромагнитных волн на частоте существенно ниже плазменной, для которых плазменное облако является отражающим, сначала в рамках модифицированного уравнения Гинзбурга [26]:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon(z, \Omega)} \right) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} \right) + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon(z, \Omega)} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} + \frac{\Omega^2}{c^2} \mathbf{H} = - \left[\nabla \times \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon(z, \Omega)} \mathbf{j}_{NL} \right) \right], \quad (1)$$

численно решается краевая задача для получения зависимости падающего поля от координаты. Здесь мы рассматриваем магнитное поле, осциллирующее с частотой Ω и амплитудой $(H(y, z), 0, 0)e^{-i\Omega t}$. Координата z направлена к телу по нормали к плазменному слою, который считается однородным по координатам x и y . В (1) введена эффективная диэлектрическая проницаемость: $\varepsilon(z, \Omega) = \varepsilon_0 (1 - \omega_L^2(z) / \{\Omega^2(1 + i\nu/\Omega)\})$, где $\omega_L(z)$ – это локальная плазменная частота, а $\nu \simeq 10^8$ Гц – частота столкновений. Данная проницаемость обусловлена линейным откликом плазмы к электрическим полям всех рассматриваемых

электромагнитных волн. Нелинейный ток \mathbf{j}_{NL} определяется как произведением плотности плазмы и линейного тока, так и нелинейным откликом электрического поля скорости, обусловленного в основном силами динамического давления. Зависимость плотности плазмы моделируется линейной функцией (для возможности аналитических оценок, численный код этого ограничения не имеет) от координаты по направлению к гиперзвуковому аппарату, с максимумом плотности $n_0 \simeq 10^{18} \text{ м}^{-3}$ у его поверхности $z = R$: $n_0(z) = n_0(z + L)/(R + L)$. Здесь $R + L = 1 \text{ м}$ – это общая толщина плазменного слоя, а L – глубина резонансного слоя ($z = 0$) от внешней границы плазмы, где действительная часть ε обращается в нуль. В таком случае локальная плазменная частота даётся формулой: $\omega_L^2(z) = e^2 n_0(z)/(M \varepsilon_0)$. Используется следующий набор физических констант и параметров:

$$e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ Кл}, \quad \varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ Кл В}^{-1} \text{ м}^{-1}, \quad M = 9 \times 10^{-31} \text{ кг}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \simeq 3 \times 10^8 \text{ м/с}, \quad \omega_L^2(R) = \frac{e^2 n_0}{M \varepsilon_0}, \quad \frac{\omega_L(R)}{2\pi} = f_L(R) = 9 \text{ ГГц}.$$

Результаты примера моделирования для падающего на плазму сигнала (случай «к аппарату», $\mathbf{j}_{NL} = 0$) приведены на Рис. 1. Хорошо заметно

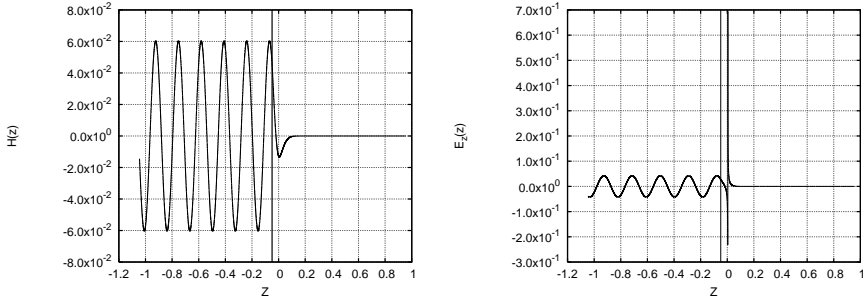


Рисунок 1 — Электрическое и магнитное поля падающего сигнала частотой 2 ГГц в плазме с типичными для входа космического аппарата в плотные слои атмосферы параметрами (плазменная частота около 9 ГГц). Хорошо видно усиление электрического поля в резонансном слое, где действительная часть эффективной диэлектрической проницаемости обращается в ноль.

усиление электрического поля в окрестности резонансного слоя, где действительная часть эффективной диэлектрической проницаемости обращается в ноль. Далее полученный профиль поля вместе с полем мощного пробного сигнала (волны накачки), испускаемого гиперзвуковым аппаратом на частоте выше плазменной, используется как входные данные для вычисления \mathbf{j}_{NL} , выступающего вынуждающей силой в (1) и генерирующего волну на разностной частоте, распространяющуюся к аппарату. При достаточно высокой частоте

пробного сигнала, частота этой волны выше плазменной и плазма для неё прозрачна. Можно интерпретировать данный процесс и по-другому: находятся слабые возмущения профиля плотности плазмы из-за приходящего низкочастотного сигнала, после чего моделируется рассеяние назад мощного пробного сигнала, испускаемого гиперзвуковым аппаратом на частоте выше плазменной, на этих возмущениях в рамках того же уравнения Гинзбурга (1) с правой частью, включающей нелинейный ток, описывающий возмущения плотности. Результат такого расчёта приведён на Рис. 2 (слева). Выполнены аналитические

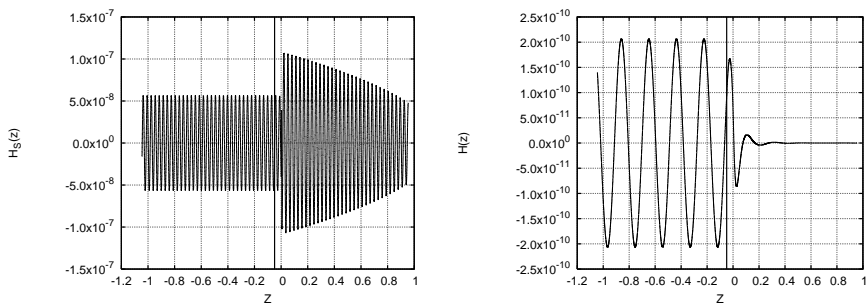


Рисунок 2 — Слева: магнитное поле высокочастотного сигнала, полученного в результате нелинейного взаимодействия высокочастотной (12 ГГц) накачки с низкочастотным сигналом, приведённым на Рис. 1. Случай для связи “к гиперзвуковому аппарату”. Справа: магнитное поле разностного низкочастотного (2 ГГц) сигнала, полученного в результате нелинейного взаимодействия высокочастотной (12 ГГц) накачки с высокочастотным информационным сигналом. Случай для связи “от гиперзвукового аппарата”.

приближённые расчёты и показано хорошее соответствие с ними результатов численного моделирования для ограниченного набора параметров. Произведена оценка осуществимости данного способа связи с использованием современных устройств (приёмников, антенн и генераторов мощного микроволнового излучения), доступных на рынке. Продемонстрирована реализуемость данного подхода, впервые предложенного в [10; 27; 28], с существенным запасом по параметрам. Такой же нелинейный процесс взаимодействия волн в плазменном слое использован и для исследования возможности посылки электромагнитного сигнала от гиперзвукового тела на приёмник вне плазменного слоя, работающий на частоте ниже плазменной. Поле разностной низкочастотной электромагнитной волны, рассчитанное в рамках этого же подхода к моделированию нелинейного взаимодействия электромагнитных волн в плазме, приведено на Рис. 2 (справа). Таким образом, автором совместно с соавторами, используя нелинейные свойства плазмы, окружающей гиперзвуковое тело при движении в плотных слоях атмосферы, путём аналитических оценок, подтверждённых численным моделированием, показана реализуемость решения т.н. проблемы блэкаута – отсутствия

связи в течение нескольких минут с, например, космическим кораблём при входе в плотные слои атмосферы и окружённым слоем плазмы.

В разделе 1.2 рассматривается задача одновременного распространения двух магнитостатических спиновых волн в намагниченной до насыщения тонкой ферромагнитной плёнке железо-иттриевого граната (ЖИГ). Геометрия задачи представлена на Рис. 3. Известно [29], что одна поверхностная магнитостати-

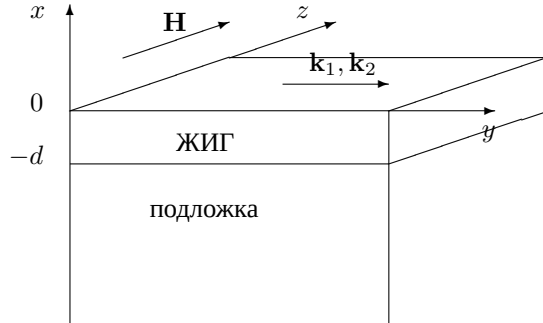


Рисунок 3 — Геометрия задачи при распространении поверхностных магнитостатических спиновых волн в железо-иттриевом гранате.

ческая спиновая волна в ЖИГ модуляционно устойчива. Однако в эксперименте при одновременном распространении двух таких волн на близких частотах наблюдалась модуляционная неустойчивость, вызванная эффектом фазовой кросс-модуляции [30]. В этих условиях применимо введение магнитостатического потенциала, описывающего распространяющиеся волны, который в нашем случае имеет вид [31]

$$\psi = A(e^{k_1 x} + \alpha e^{-k_1 x})e^{i(k_1 y - \omega_1 t)} + B(e^{k_2 x} + \beta e^{-k_2 x})e^{i(k_2 y - \omega_2 t)} + c.c. \quad (2)$$

где A, B - амплитуды двух магнитостатических спиновых волн, k_1, k_2 - волновые числа, α, β - коэффициенты, зависящие от параметров пленки, внешнего магнитного поля и определяющие распространение волн у той или иной поверхности [29]. При этом высокочастотные компоненты магнитного поля $\mathbf{h} = \nabla\psi$. Для построения теории фазовой кросс-модуляции магнитостатических спиновых волн в ЖИГ была выведена из первых принципов [31] первая нелинейная поправка к линейной дисперсии ω_{0i} , $i = 1, 2$:

$$\omega_i^2 = \omega_{0i}^2 - 4 \frac{\pi\gamma}{M_0} (2\omega_H + \omega_{M_0} (1 - e^{-2k_i d})) \times (\chi_1^2 + \chi_2^2) (|A|^2 k_1^2 (e^{2k_1 x} + |\alpha|^2 e^{-2k_1 x}) + |B|^2 k_2^2 (e^{2k_2 x} + |\beta|^2 e^{-2k_2 x})). \quad (3)$$

Здесь $\gamma = 2,8$ МГц/Эрстед – это гиромагнитное отношение, связывающее частоты прецессий с соответствующими полями $\omega_H = \gamma H$, $\omega_{M_0} = 4\pi\gamma M_0$, где $M_0 = 135,6$ Гаусс – это намагниченность насыщения; χ_1 и χ_2 – компоненты

тензора магнитной восприимчивости. Нелинейные дисперсионные уравнения (3) для поверхностных магнитостатических спиновых волн выведены в пределе слабой нелинейности. Используя разложение данной дисперсионной зависимости в ряд Тейлора до членов второго порядка и заменяя конечные приращения дифференциальными операторами: $\Delta\omega_1 \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}$, $\Delta k_1 \rightarrow -i\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow v_{gi}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, получается система уравнений, описывающая динамику связанных магнитостатических спиновых волн:

$$\begin{cases} i\frac{\partial A}{\partial t} + iv_{g1}\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{1}{2}\beta_1\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = f_1(a^2|A|^2 + b^2|B|^2)A, \\ i\frac{\partial B}{\partial t} + iv_{g2}\frac{\partial B}{\partial y} + \frac{1}{2}\beta_2\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = f_2(a^2|A|^2 + b^2|B|^2)B, \end{cases} \quad (4)$$

здесь $v_{gi} = 2d\frac{\omega_{M0}^2}{4\omega_i}e^{-2k_id}$, $\beta_i = -\frac{v_{gi}}{\omega_i}[v_{gi} + \omega_id]$, $a^2 = k_1^2(e^{2k_1x} + 2|\alpha|^2e^{-2k_1x})$, $b^2 = k_2^2(e^{2k_2x} + 2|\beta|^2e^{-2k_2x})$, $f_i = -\frac{\omega_{M0}}{2M_0^2\omega_i}(2\omega_H + \omega_{M0}(1 - e^{-2k_id}))(\chi_{1i}^2 + \chi_{2i}^2)$. Параметры a и b характеризуют ослабление амплитуды волны с удалением от поверхности. Далее уравнения (4) исследуются на модуляционную неустойчивость, обусловленную фазовой кросс-модуляцией, используя стандартные методы анализа, аналогичные применяемым, к примеру, в оптике [11]. Получено условие на параметры, при выполнении которого поверхностные магнитостатические спиновые волны при одновременном распространении становятся модуляционно неустойчивыми. Зависимость инкремента неустойчивости от волновых векторов возмущений амплитуды волн K_1 , K_2 приведены на Рис. 4. Полученные результаты позволили автору совместно с соавтором впервые дать

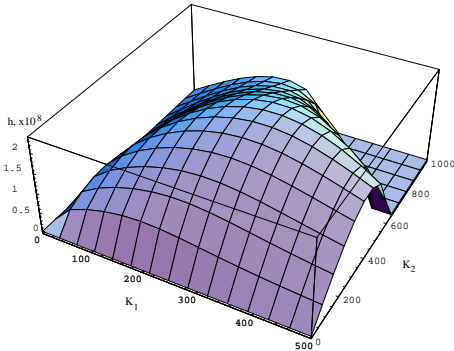


Рисунок 4 — Зависимость инкремента неустойчивости h , соответствующего фазовой кросс-модуляции магнитостатических спиновых волн при одновременном распространении, от волновых векторов возмущений амплитуды волн K_1 , K_2 .

аналитическое объяснение экспериментальным данным, приведённым в работе [30].

Изложенные в первой главе результаты опубликованы в статьях [A1; A2].

Вторая глава использует один из стандартных подходов в моделировании нелинейных волн, а именно приближение огибающей. Для многих задач оптики и физики плазмы, длина волны несущей много меньше характерного масштаба модуляции её амплитуды. В такой ситуации т.н. «приближение огибающей», а именно описание динамики огибающей функции амплитуды сигнала, абстрагируясь от высокочастотной несущей, может быть чрезвычайно эффективным. Уже в предыдущей главе, в разделе 1.2, для уравнений на возмущение амплитуды уже использовалось приближение огибающей, но т.к. там это была только часть задачи и вывод производился довольно примитивным методом, было принято решение оставить раздел в главе, посвящённой простейшим методам моделирования нелинейных волн.

В разделах 2.1-2.2 рассматриваются две задачи, связанные с распространением света в метаматериалах с отрицательным показателем преломления. Современные метаматериалы высокочувствительны как к поляризации света, так и к частоте. Для одной поляризации или частоты выполняется условие резонанса для внутренней структуры метаматериала и, как результат, теоретически может реализовываться отрицательный показатель преломления, в то время как для другой поляризации или частоты условия резонанса нарушаются, и эффективный показатель преломления среды остаётся положительным. Таким образом, в среде есть две взаимодействующих волны, распространяющиеся в противоположных направлениях. Рассмотрим конкретные случаи.

В разделе 2.1 исследуется случай Брэгговской решётки, образованной периодическими слоями с нелинейной средой. Примерами образующих такие слои материалов могут рассматриваться металлические сферические наночастицы, дающие нелинейный отклик на нужной частоте [32; 33]. Данная система в приближении огибающей амплитуды и слабой нелинейности описывается модификацией модели Максвелла-Даффинга [A3] для волн, распространяющихся в противоположных направлениях (удобно использовать безразмерные координаты и переменные: e_1 и e_2 – огибающие амплитуды электрических полей, а p – поляризация наночастиц в слоях, образующих Брэгговскую решётку, ζ – пространственная и τ – временная координаты):

$$\begin{aligned} i \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right) e_1 + \delta e_1 = -p, \quad i \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) e_2 - \delta e_2 = +p, \\ i \frac{\partial p}{\partial \tau} + \Delta p + \mu |p|^2 p = -(e_1 + e_2), \end{aligned} \quad (5)$$

где μ – это безразмерный коэффициент нелинейности, δ – безразмерный коэффициент расстройки, Δ – это безразмерная расстройка резонансной частоты плазмонных наночастиц от частоты несущей электромагнитного поля. Данная система имеет аналитическое решение в виде уединённой волны, распространяющейся с постоянной скоростью без изменения формы [A3; A4]. Численное моделирование системы позволило продемонстрировать, что данное решение

является аттрактором. Реалистичное граничное условие в виде входящего с одного из краёв Брэгговской решётки импульса, имеющего форму гауссианы с относительно простым фазовым профилем, привело к формированию уединённой волны и сбросу части граничного условия в виде волн малой амплитуды. Результаты численного моделирования представлены на Рис. 5-6. Хорошо вид-

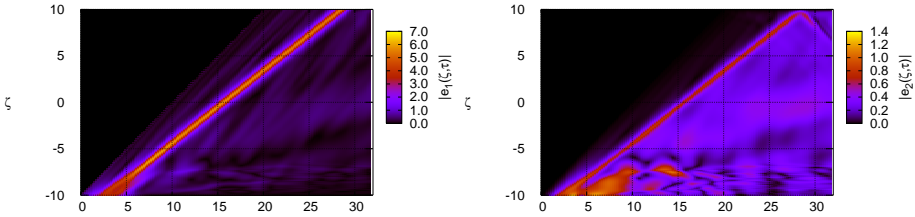


Рисунок 5 — Модули электрических безразмерных полей, распространяющихся в противоположных направлениях, при подаче импульса с одного из краёв решётки. Видно, что появляется уединённая волна распространяющаяся без видимого изменения формы на фоне шума.

но формирование импульса в виде уединённой волны, распространяющегося без изменения формы на фоне шума малой амплитуды. Продемонстрирован захват поля, распространяющегося в направлении обратном движению импульса, через поляризацию. Распространение волны поляризации и сравнение с точным решением приведены на Рис. 6. Профиль в достаточно поздний момент времени, когда волны шума уже удалились от уединённой волны, очень близок к точному решению, а в большей части пика визуально просто с ним совпадает.

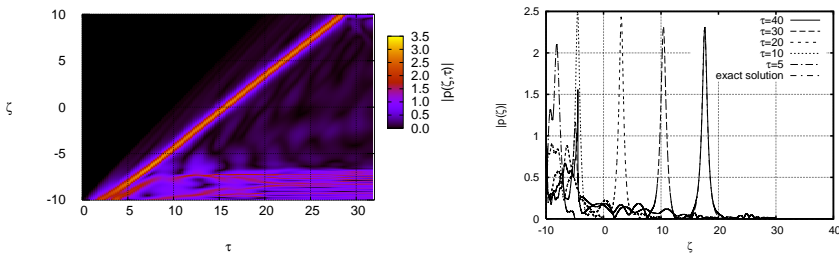


Рисунок 6 — Модуль безразмерной поляризации, видно формирование импульса, распространяющегося вместе с уединённой волной. На правой панели срез модуля поля в разные моменты времени. Самый правый профиль, показанный сплошной линией, соответствует безразмерному времени $\tau = 40$ и визуально совпадает с точным решением для уединённой волны.

Таким образом, получено аналитически и исследовано численно решение в виде уединённой волны. Показано, что решение является притягивающим и при часто используемой форме входного импульса с реализуемой зависимостью фазы от времени происходит формирование решения, близкого к уединённой волне, которое распространяется без видимого изменения формы. Т.е. наблюдается эффект, подобный самоиндуцированной прозрачности.

Следующая задача, демонстрирующая применение метода огибающей амплитуды для нелинейных систем, связана с распространением оптического сигнала в активных средах и представлена в разделе 2.2. Дело в том, что большая часть предлагаемых и реализуемых сейчас метаматериалов, которые демонстрируют эффект обгона фазы (при большой оптической толщине соответствующий отрицательному показателю преломления), основываются на использовании плазмонных структур, которые дают существенную диссипацию оптического сигнала. Для компенсации этих потерь предлагается использовать активную среду, где внешним источником формируется инверсная заселённость, а при прохождении полезного сигнала она работает как усилитель. С учётом того, что разные частоты и поляризации по-разному взаимодействуют со структурой метаматериала, а именно для одной частоты или поляризации мы можем иметь резонанс структуры и отрицательный показатель преломления, а для другой среда имеет обычные оптические свойства, надо использовать систему уравнений для полей, распространяющихся в противоположные стороны и связанных через взаимодействие со средой. В работе [A5] рассматривается Λ -конфигурация трёхуровневой активной среды (один верхний уровень и два нижних, соответствующих либо разным частотам перехода, либо разным поляризациям) и соответствующая модификация модели Максвелла-Блоха для двух полей \mathbf{E}_\pm , распространяющихся в противоположные стороны, что даёт суммарное электрическое поле, распространяющееся вдоль оси z : $\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_+(z, t)e^{i\theta_+} + \mathbf{E}_-(z, t)e^{i\theta_-} + \text{с.с.}$, здесь с.с. означает комплексное сопряжение, $\mathbf{E}_\pm(z, t)$ – медленно меняющиеся амплитуды полей, а θ_\pm – быстрые фазы: $\theta_\pm \sim (k_\pm z - \omega_\pm t)$. Здесь k_\pm и ω_\pm – волновые вектора и частоты несущих электрических полей. Вводя проекции электрического поля на направления соответствующих дипольных моментов $E_+ = 2\mathbf{E}_+ \cdot \alpha_+$ and $E_- = 2\mathbf{E}_- \cdot \alpha_-$, макроскопические поляризации ρ_\pm , когерентность нижних уровней ρ (эти три компоненты дают недиагональные элементы матрицы плотности), а также плотности заполнения нижних уровней n_\pm , и верхнего уровня N (эти три значения дают диагональные компоненты матрицы плотности), мы получаем уравнения Максвелла-Блоха (в автореферате приводятся в упрощённой форме, без учёта отстройки от частот резонансов и ширины спектральной линии):

$$\frac{\partial E_\pm}{\partial z} + \frac{1}{v_\pm} \frac{\partial E_\pm}{\partial t} = \rho_\pm, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{2}[E_+^* \rho_- + E_- \rho_+^*], \quad (6a)$$

$$\frac{\partial \rho_+}{\partial t} = \frac{1}{2}[E_+(N - n_+) - E_- \rho^*], \quad \frac{\partial \rho_-}{\partial t} = \frac{1}{2}[E_-(N - n_-) - E_+ \rho], \quad (6b)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{1}{2}[E_+\rho_+^* + E_+^*\rho_+ + E_-\rho_-^* + E_-^*\rho_-], \quad \frac{\partial n_{\pm}}{\partial t} = \frac{1}{2}[E_{\pm}\rho_{\pm}^* + E_{\pm}^*\rho_{\pm}]. \quad (6в)$$

Групповые скорости $v_{\pm} = v(\omega_{\pm})$ вычисляются из дисперсионного соотношения.

Для краткости приведём результаты численного моделирования лишь для одного из вариантов начальных условий: входной импульс в виде Гауссианы с шириной 1 и амплитудой 2, входит на левой границе с задержкой по времени 3; начальные заселённости нижних уровней $n_+ = 0,8$, $n_- = 0,2$, с начальной когерентностью между уровнями $\rho_0 = 0,3$. Учитывая сохранение числа возбуждений $N + n_+ + n_- = 1$, начальная заселённость верхнего уровня $N = 0$. На Рис. 7 видно распространение импульса в поле E_+ со скоростью существенно меньше групповой и захват и распространение в положительном направлении импульса в поле E_- . Таким образом, построена модель и численно продемонстрировано распространение света в активной среде с отрицательным и положительным эффективными показателями преломления.

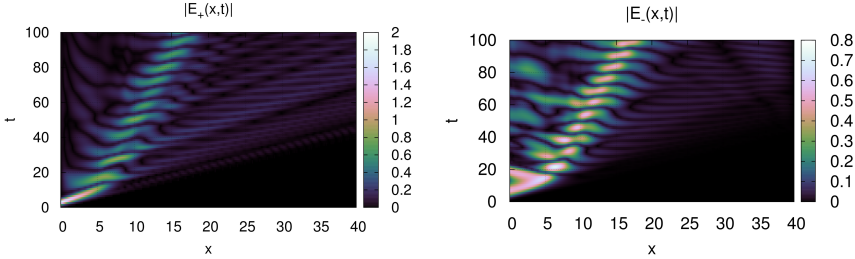


Рисунок 7 — Распространение пары импульсов в полях с противоположным распространением за счёт самозахвата через поляризацию. Начальные условия по плотностям заселённости: $n_+ = 0,8$, $n_- = 0,2$. Когерентность между нижними уровнями $\rho_0 = 0,3$. Амплитуда входящего импульса, имеющего форму Гауссианы $E_{+0}(t)$: $A = 2$. Импульс шириной 1 входит с задержкой по времени 3.

Завершающим глав 2 примером, демонстрирующим применение метода огибающей амплитуды, является представленное в разделе 2.3 моделирование вынужденного рассеяния Мандельштам-Бриллюэна [34] в плазме, характерной для установки лазерного управляемого термоядерного синтеза NIF (National Ignition Facility в Ливерморской национальной лаборатории США) [35]. Чтобы избежать явления самофокусировки и «разбрызгивания» лазерного пучка, его специальным образом разбивают на множество пучков, которые имеют конечное время когерентности T_c . При этом излучение в плазме разбивается на т.н. «спеклы» – небольшие области высокой интенсивности. Коллегами автора была предложена теория т.н. коллективной неустойчивости, учитывающей взаимодействие спеклов в приближении $cT_c \gg$ размера спекла [36] (здесь c – скорость света в среде). Надо отметить, что эта неустойчивость имеет порог по интенсивности, в отличие от ветви, получаемой из приближения

случайной фазы. С целью проверки применимости использованных приближений и исследования взаимодействия различных ветвей неустойчивости, было необходимо выполнить численное моделирование распространения лазерного излучения в плазме, дефазированного пространственно и во времени (с целью уменьшения когерентности) определённым образом, в присутствии звуковой волны. Рассмотрим лазерный пучок с частотой ω_0 , распространяющийся в плазме вдоль оси z . Электрическое поле даётся суперпозицией поля лазерного пучка с огибающей $E(\mathbf{r}, z, t)$ и рассеянной назад волны с огибающей $B(\mathbf{r}, z, t)$: $\mathcal{E} = (1/2)e^{-i\omega_0 t} \left[Ee^{ik_0 z} + Be^{-ik_0 z - i\Delta\omega t} \right] + c.c.$, Здесь $\Delta\omega = -2k_0 c_s$ – это сдвиг по частоте, определяемый связью E и B посредством ионно-акустической волны с фазовой скоростью c_s and волновым вектором $2k_0$, представляющей собой флуктуации плотности плазмы δn_e , которые описываются как $\frac{\delta n_e}{n_e} = \frac{1}{2}\sigma e^{2ik_0 z + i\Delta\omega t} + c.c.$, где $\sigma(\mathbf{r}, z, t)$ – это медленная (в смысле $\Delta\omega T_c \gg 1$) огибающая и n_e – это средняя плотность носителей заряда. Флуктуации δn_e предполагаются слабыми по сравнению с критической плотностью электронов n_c . Рассматривается модель однородной по параметрам плазмы. Связь E и B с флуктуациями плотности плазмы даёт:

$$\left[i(c^{-1}\partial_t + \partial_z) + \frac{1}{2k_0}\nabla^2 \right] E = \frac{k_0}{4} \frac{n_e}{n_c} \sigma B, \quad (7)$$

$$\left[i(c^{-1}\partial_t - \partial_z) + \frac{1}{2k_0}\nabla^2 \right] B = \frac{k_0}{4} \frac{n_e}{n_c} \sigma^* E, \quad (8)$$

$$[i(c_s^{-1}\partial_t + 2\nu_{ia}k_0 + \partial_z) - (4k_0)^{-1}\nabla^2]\sigma^* = -2k_0 E^* B. \quad (9)$$

где $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$ и σ описывается акустическим волновым уравнением, связанным с пандеромоторной силой $\propto \mathcal{E}^2$. Здесь мы пренебрегли членами $\propto |E|^2$, $|B|^2$ в правой части, ответственными за самофокусировку, $\nu_{ia} = \nu_L/2k_0 c_s$ масштабированный коэффициент акустического затухания Ландау ν_L . E и B определены в тепловых (термодинамических) единицах таким образом [37], что $|E|^2 \equiv I = (v_{osc}/v_e)/4$, где v_{osc} скорость, с которой осциллирует свободный электрон в электромагнитном поле лазерного пучка, а v_e – тепловая скорость электронов. Использовалась простая модель вынужденной пространственной некогерентности пучка со сглаживанием, определяющая стохастические граничные условия при $z = 0$ для компонент $\hat{E}(\mathbf{k})$ пространственного (по переменным \mathbf{r}) преобразования Фурье амплитуды лазерного пучка [37]: $\hat{E}(\mathbf{k}, z = 0, t) = |E_{\mathbf{k}}|e^{i\phi_{\mathbf{k}}(t)}$, $(\exp i[\phi_{\mathbf{k}}(t) - \phi_{\mathbf{k}'}(t')]) = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}e^{-|t-t'|/T_c}$, где $|E_{\mathbf{k}}| = k^{1/2}const$, $k < k_m$; $E_{\mathbf{k}} = 0$, $k > k_m$, выбрано как идеализированная модель оптики NIF в виде «шляпы» (англ. «top hat») в k -пространстве. Здесь $\langle \cdot \rangle$ означает усреднение по ансамблю стохастических реализаций граничного условия, $k_m \simeq k_0/(2F)$ – ширина «шляпы», а средняя интенсивность $\langle I \rangle \equiv \langle |E|^2 \rangle = I$ определяет константу. Моделирование проводилось в двумерном приближении (цилиндрическая симметрия в плоскости \mathbf{r} без зависимости от азимутального угла), с коррекцией граничного условия для входящего лазерного излучения (фактор $k^{1/2}$), чтобы

учесть дополнительный множитель k в интеграле по интенсивности и получить те же аналитические решения, как и в трёхмерном случае. Вычисления, выполненные в упрощённой трёхмерной модели, подтвердили применимость этого приближения. Граничное условие на правой границе на акустическую волну σ нулевое, а на отражённое поле B случайное по фазе в каждой гармонике. Скорость звука $c_s = c/500$, типичная для плазмы в NIF. Величины инкрементов

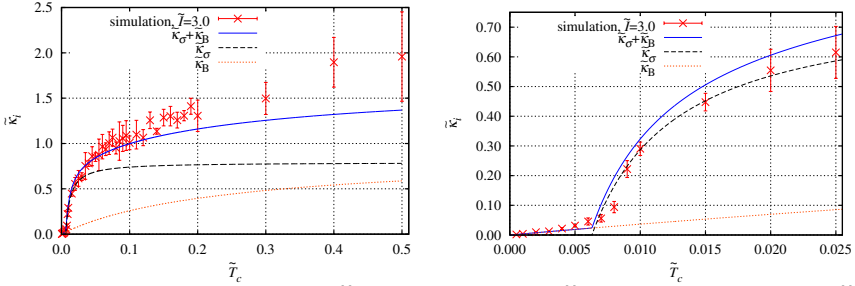


Рисунок 8 — Пространственный инкремент неустойчивости $\tilde{\kappa}_i$, полученный из стохастического моделирования ($\tilde{I} = 3$, $\mu = 5.12$), в сравнении с ветвью, получаемой из приближения случайной фазы $\tilde{\kappa}_B$, инкрементом коллективной неустойчивости $\tilde{\kappa}_\sigma$ и их суммой $\tilde{\kappa}_B + \tilde{\kappa}_\sigma$.

неустойчивости, полученные при усреднении по ансамблю реализаций граничных условий, приведены на Рис. 8. Видно, что пространственный инкремент неустойчивости, полученный из стохастического моделирования, сравнительно хорошо описывается суммой инкрементов двух ветвей $\tilde{\kappa}_B + \tilde{\kappa}_\sigma$. Продемонстрирован пороговый характер коллективной неустойчивости, причём значение порога хорошо соответствует аналитической оценке $\tilde{T}_c = \frac{4c_s}{c} \tan(2/\tilde{I}) = 0,00629 \dots$ При \tilde{T}_c , стремящемся к нулю значение инкремента сходится с теорией получаемой из приближения случайной фазы.

Полученный результат демонстрирует существование новой ветви коллективной неустойчивости и заметно более высокие значения усиления отражённого назад в результате вынужденного рассеяния Мандельштамма-Бриллюэна излучения. Т.к. попадание существенной доли сверхмощного излучения обратно в оптическую систему чревато её разрушением, предложены меры по уменьшению инкремента.

Изложенные во второй главе результаты опубликованы в [A3—A6].

В **третьей главе** рассматривается подход к моделированию волн на поверхности потенциального течения глубокой двумерной несжимаемой жидкости. Двумерность позволяет использовать всю мощь ТФКП, включая конформные отображения, и работать в рамках полных уравнений, аналогичных уравнению Эйлера. Впервые конформные отображения для задач двумерной гидродинамики использовал ещё Стокс [13]. В работах Овсянникова [38] вместо

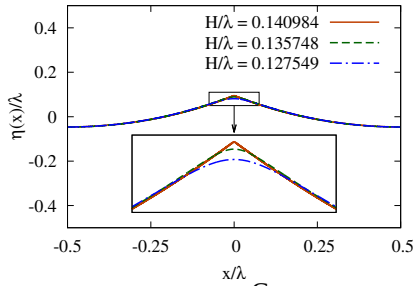


Рисунок 9 — Примеры рассчитанных волн Стокса для различных уровней нелинейности (крутизна, т.е. отношений размаха волны H к её длине λ).

решения уравнения Лапласа в области с переменной границей, было предложено описать динамику жидкости как уравнения на зависящее от времени конформное отображение $z = x(w, t) + iy(w, t)$, $w = u + iv$ нижней комплексной полуплоскости на область, занятую жидкостью. При этом действительная ось $v = 0$ отображается в поверхность жидкости. На этой оси имеются следующие уравнения на конформное отображение [38; 39]:

$$y_t x_u - x_t y_u + \hat{H} \psi_u = 0, \quad \psi_t y_u - \psi_u y_t + g y y_u = -\hat{H} (\psi_t x_u - \psi_u x_t + g y x_u), \quad (10)$$

где ψ – потенциал скорости на поверхности, а $\hat{H} f(u) = (1/\pi) \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u')/(u' - u) du'$ – преобразование Гильберта. Особый интерес представляют волны Стокса [12] – периодические решения, распространяющиеся с постоянной скоростью c без изменения формы. В таком случае конформное отображение $y = y(u - ct)$ удовлетворяет следующему уравнению [39]: $-c^2 y_u + g y y_u + g \hat{H} [y(1 + \tilde{x}_u)] = 0$.

В цикле работ, представленном в разделе 3.1, автором совместно с коллегами, были вычислены с высокой точностью (относительная ошибка не более 10^{-26}) волны Стокса (как пример см. Рис. 9) в широком диапазоне уровня нелинейности [A7; 40] и опубликованы для использования сообществом [41] в виде высокоточных аппроксимаций Паде <http://stokswave.org>.

Используя эти результаты, удалось уточнить крутизну, т.е. нормированный на длину волны размах (разница между самой высокой и самой глубокой точками) предельной волны Стокса, при которой происходит формирование особенности (угла 120 градусов) на гребне [A7]: $H_{max}/\lambda = 0,1410633 \pm 4 \times 10^{-7}$. Разница между этим значением и максимальной крутизной вычисленной волны составляла тысячные доли процента.

Позже, используя данную библиотеку волн Стокса, была численно исследована супергармоническая (относительно возмущений с длиной волны меньше, чем длина самой волны Стокса) неустойчивость [A8]. Данные результаты представлены в разделе 3.2. Многие характеристики волны Стокса, например, энергия или скорость, ведут себя как осциллирующие функции крутизны и что каждый экстремум энергии даёт появление новой ветви неустойчивости [42]. Впервые удалось подробно исследовать вторую ветвь неустойчивости волны

Стокса, достичь и исследовать третью ветвь неустойчивости. Результаты представлены на Рис. 10.

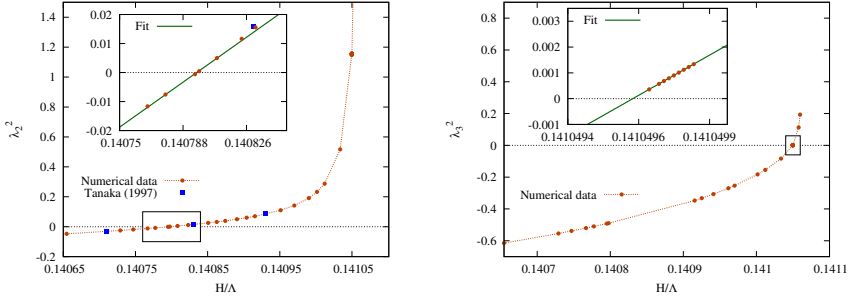


Рисунок 10 — Инкременты роста второй (слева) и третьей (справа) ветвей супергармонической неустойчивости волны Стокса.

Продемонстрирован механизм появления новых ветвей неустойчивости как движение чисто мнимых собственных значений (инкрементов неустойчивости) в комплексной плоскости к началу координат и выход на действительную ось. Используя вычисленные инкременты неустойчивости, удалось предложить для них универсальные феноменологические зависимости, работающие для всех ветвей супергармонической неустойчивости волны Стокса (см. Рис. 11) в двух пределах: вблизи порога появления ветви и вдали от него. Этот результат был проверен и подтверждён численно после достижения четвёртой ветви супергармонической неустойчивости в недавней работе [43]. Также в работе [A8] опубликована уточнённая оценка крутизны предельной волны Стокса: $H_{max}/\lambda = 0,141063483980 \pm 10^{-12}$.

Изложенные в третьей главе результаты опубликованы в [A7; A8].

В **четвертой главе** используется и исследуется описание волн на поверхности трёхмерной жидкости в рамках слабонелинейного подхода. Всё так же рассматривается потенциальное течение несжимаемой глубокой жидкости, но в более общем случае трёхмерной жидкости невозможно использовать методы ТФКП и поэтому приходится использовать разложение [7] по малой средней крутизне $\mu = \sqrt{(|\nabla\eta|^2)}$, которая в большинстве практически важных случаев имеет порядок $\approx 0,1$. При разложении гамильтониана до членов четвёртого порядка, динамические уравнения таковы [7] (в данной главе по умолчанию моделирование производилось в этих уравнениях, если не указано иначе):

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \hat{k}\psi - (\nabla(\eta\nabla\psi)) - \hat{k}[\eta\hat{k}\psi] + \hat{k}(\eta\hat{k}[\eta\hat{k}\psi]) + \frac{1}{2}\Delta[\eta^2\hat{k}\psi] + \frac{1}{2}\hat{k}[\eta^2\Delta\psi], \\ \dot{\psi} &= \sigma'\Delta\eta - g\eta - \frac{1}{2}\left[(\nabla\psi)^2 - (\hat{k}\psi)^2\right] - [\hat{k}\psi]\hat{k}[\eta\hat{k}\psi] - [\eta\hat{k}\psi]\Delta\psi. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $\mathbf{r} = (x, y)$ – вектор координат в плоскости $z = 0$, занимаемой поверхностью жидкости в покое, $\eta(\mathbf{r}, t)$ – отклонение поверхности от спокойного состояния,

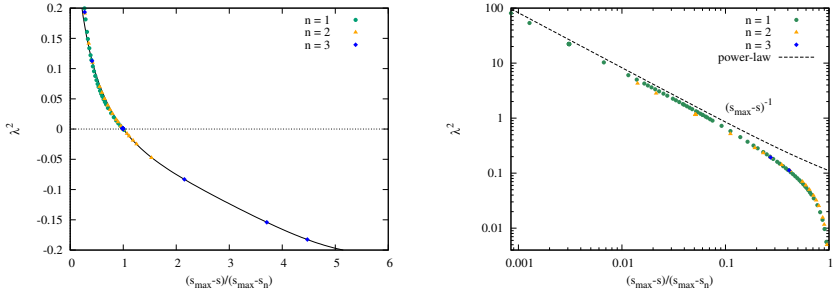


Рисунок 11 — Универсальные зависимости, работающие для всех ветвей супергармонической неустойчивости волны Стокса. Здесь s — крутизна волны Стокса, s_n — пороговая крутизна появления n -ной ветви неустойчивости, s_{max} — крутизна предельной волны Стокса. Слева — подгоночная феноменологическая кривая для малых значений инкремента (вблизи порога появления каждой ветви неустойчивости), справа — асимптотика для больших значений инкремента (вдали от порогов появления новых ветвей неустойчивости).

$\Phi(\mathbf{r}, z, t)$ — потенциал скорости $\mathbf{v} = \nabla\Phi$, $\psi(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, \eta(\mathbf{r}, t), t)$ — потенциал скорости на поверхности, $\Delta = \nabla^2$ — лапласиан и $\hat{k} = \sqrt{-\Delta}$. Для представления волн в Фурье-пространстве по (x, y) удобно использовать нормальные переменные $a_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2k}}\eta_{\mathbf{k}} + i\sqrt{\frac{k}{2\omega_{\mathbf{k}}}}\psi_{\mathbf{k}}$, представляющие собой разложение по плоским волнам [A9]. Переход к таким слабонелинейным уравнениям позволяет выделить т.н. резонансные процессы взаимодействия волн, дающие наибольший вклад на больших временах. Для трёхволновых взаимодействий главенствующим является процесс, соответствующий распаду одной волны на две или слиянию двух волн в одну. Такое взаимодействие подчиняется следующим резонансным условиям [7; 8]:

$$\omega_{k_0} = \omega_{k_1} + \omega_{k_2}, \quad \mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \quad (12)$$

где \mathbf{k}_i — волновой вектор i -й волны, ω_k — линейный дисперсионный закон, а $k_i = |\mathbf{k}_i|$. Резонансные условия для важнейшего четырёхволнового взаимодействия (рассеяние «два в два») [7]:

$$\omega_{k_1} + \omega_{k_2} = \omega_{k_3} + \omega_{k_4}, \quad \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4. \quad (13)$$

Известно, что дисперсионное соотношение гравитационно-капиллярных волн на поверхности несжимаемой глубокой жидкости $\omega_k = \sqrt{\sigma'k^3 + gk}$ (здесь $\sigma' = \sigma/\rho$ — это делённый на плотность жидкости коэффициент поверхностного натяжения, а g — ускорение свободного падения) для воды может быть упрощено до чисто капиллярного $\omega_k = \sqrt{\sigma'k^3}$ при масштабах длин волн $\lambda \lesssim 5$ мм и до чисто гравитационного $\omega_k = \sqrt{gk}$ при характерных длинах волн $\lambda \gtrsim 5$ см. Для капиллярных волн главным является трёхволновой процесс (12), а для гравитационных — четырёхволновое взаимодействие (13) [7]. Таким образом, несмотря

на очень схожие динамические уравнения (отличие только в одном линейном члене), физика нелинейных процессов в этих двух предельных случаях существенно отличается.

Резонансные условия по волновым векторам входят как δ -функция в нелинейные члены гамильтониана и выполняются точно. Резонанс по частотам появляется из требования близости к нулю разницы частот (для примера возьмём (12)) $\omega_{k_0} - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} = 0$. Для численного моделирования волновой динамики обычно используют периодические граничные условия по пространству. В экспериментальных волновых бассейнах акватория конечна. В обоих этих случаях вводится характерный размер области L по заданному направлению (период для численного моделирования или размер бассейна в эксперименте). Таким образом, волновые вектора принимают дискретные значения с шагом $2\pi/L$. Учитывая формулы для ω_k становится понятно, что на такой равномерной сетке волновых векторов точное выполнение резонансного условия по частотам может быть сильно затруднено или невозможно [44; 45]. Однако ещё в ранних работах автора [46; 47] было показано, что для капиллярных и гравитационных волн возможна реализация резонансных взаимодействий на равномерной сетке за счёт нелинейного уширения резонансной кривой $\omega_{k_0} - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} \leq \Gamma$, где Γ – малая величина, зависящая в том числе от уровня нелинейности системы.

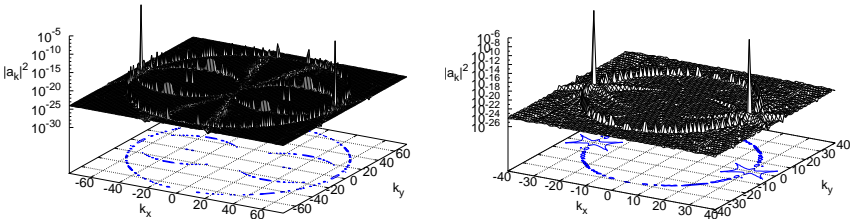


Рисунок 12 — Примеры развившейся кольцевой неустойчивости капиллярной (слева) и гравитационной (справа) стоячих волн. Высокие пики – начальные волны. Рядом с ними видны распадные резонансные процессы для каждой индивидуальной волны.

Раздел 4.1 посвящён рассмотрению одного из примеров четырёхволнового резонансного процесса, универсального для всех изотропных систем, т.е. $\omega_{\mathbf{k}} = \omega(|\mathbf{k}|)$, каковым является неустойчивость стоячей волны, задаваемой двумя плоскими волнами с противоположными волновыми векторами. При этом в (13) получаем: $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2, \Rightarrow \mathbf{k}_3 = -\mathbf{k}_4, \Rightarrow \omega_{k_1} + \omega_{k_2} = 2\omega_{k_1} = 2\omega_{k_3}, \Rightarrow k_1 = k_3$. Таким образом, резонансной кривой для данного процесса является кольцо в пространстве волновых векторов с центром в начале координат, проходящее через оба волновых вектора стоячей волны \mathbf{k}_1 и $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_1$. Впервые этот процесс был открыт в [47], а исследован численно и построена его аналитическая теория в [A9]. На Рис. 12 показаны примеры кольцевой неустойчивости для капиллярной и гравитационной стоячих волн. Для эффективного численного

моделирования поверхностных волн в [A9] описана и исследована на устойчивость численная схема, обобщающая метод гамильтоновского интегрирования, впервые предложенный для оптических систем в [48].

В случае гравитационных волн, согласно теории волновой турбулентности [7; 8] должен реализовываться так называемый «обратный каскад» (подробнее он будет рассмотрен в главе 5), соответствующий потоку волнового действия или числа возбуждений от малых масштабов к большим. Однако эти результаты основываются на допущении, что главными являются резонансные процессы взаимодействия волн. Как было отмечено выше, дискретность сетки волновых векторов в случае периодических граничных условий или бассейна конечного размера приводит в затруднению в реализации резонансного условия по частотам, которое преодолевается повышением нелинейности в системе и, таким образом, уширением резонансной кривой. Однако хорошо известно [7], что коэффициент нелинейного взаимодействия для гравитационных волн ведёт себя как $\sim k^3$, т.е. быстро убывает при $k \rightarrow 0$. Т.е. нелинейные взаимодействия постепенно «выключаются» при выходе на большие масштабы, сравнимые с характерным размером области. Однако в k -пространстве есть поток волнового действия, который приносит волновое действие в большие масштабы. Начиная с некоторого масштаба, определяемого средним уровнем нелинейности в системе, этот поток не может распространяться дальше к $k = 0$. Таким образом происходит накопление волнового действия или возбуждений на этом масштабе. Данный процесс, впервые обнаруженный и описанный автором для гравитационных волн (подробнее описан в главе 5), называется «конденсацией» по аналогии с Бозе-Эйнштейновской конденсацией в квантовой статистике. Однако в данном случае длинноволновый фон или «конденсат» накапливается при конечных $k_c > 0$. Было необходимо исследовать влияние этого нового явления на поведение системы. Эти работы представлены в разделе 4.2.

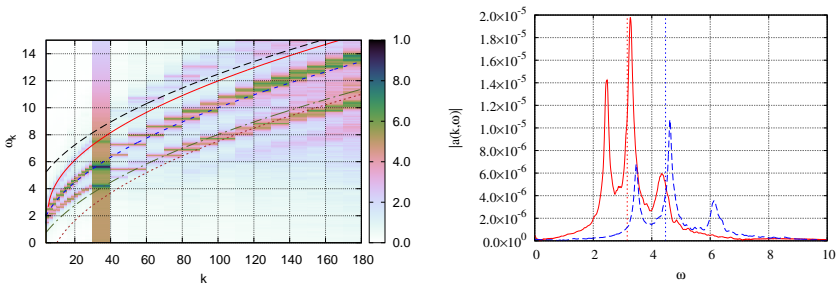


Рисунок 13 — Результат влияния конденсата, представляющего собой кольцо с радиусом $k_c \approx 5 - 6$ на дисперсионный закон $\omega_k = \sqrt{gk}$ (слева) и срезы измененного эффективного дисперсионного соотношения при $k = 10$ и $k = 20$.

Сначала было исследовано влияние наличия конденсата на эффективный дисперсионный закон гравитационных волн [A10]. Для этого моделировалась

изотропная волновая турбулентность с накачкой, отслеживалось накопление конденсата в системе, после чего записывались отдельные гармоники в виде временных рядов с последующим вычислением Фурье образа как функции частоты ω . В случае чисто линейной системы для гармоники с волновым вектором k в спектре должна наблюдаться единственная линия на частоте $\omega_k = \sqrt{gk}$ с шириной порядка обратного времени накопления временного ряда $1/T$. Слабая нелинейность приводит к умеренному уширению линии и небольшому сдвигу в область меньших масштабов, известному как нелинейный сдвиг частоты. При наличии конденсата в области, соответствующей обратному каскаду (умеренно малые масштабы), ширина линии становится сравнимой с расстоянием до боковых полос, а сами боковые полосы сравнимы по амплитуде с пиком, соответствующим линейной частоте, как показано на Рис. 13, а это значит, что для этих масштабов линейный закон дисперсии является плохим приближением и необходимо строить теорию взаимодействия спектра с конденсатом.

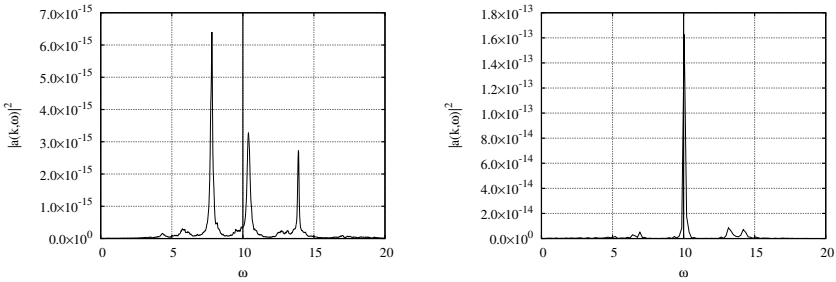


Рисунок 14 — Результат влияния конденсата, представляющего собой кольцо с радиусом $k_c \approx 5 - 6$ на дисперсионное соотношение при $k = 100$. В данной симуляции $g = 1$ и поэтому линейный закон дисперсии даёт $\omega = 10$, что обозначено вертикальной линией. Слева конденсат присутствует, справа – подавлен.

После этого было установлено [A11], как меняется ширина линии в области прямого каскада при наличии конденсата, после того, как подавлен только конденсат и после подавления и конденсата, и обратного каскада. Показано, что как минимум данное приближение (малая ширина линии, заменяемая δ -функцией для резонансного условия по частотам при выводе кинетического уравнения) удовлетворительно выполняется для прямого каскада уже после подавления только конденсата и не выполняется с конденсатом. Это означает, что для прямого каскада также надо учитывать взаимодействие с конденсатом и реализуемость стационарных решений кинетического уравнения (спектры Колмогорова-Захарова) в такой ситуации находится под вопросом. Пример изменения дисперсионного соотношения для одного из случаев представлен на Рис. 14.

В разделе 4.3 исследовалась [A12] через прямое численное моделирование зависимость затухания волнового спектра от крутизны (меры нелинейности)

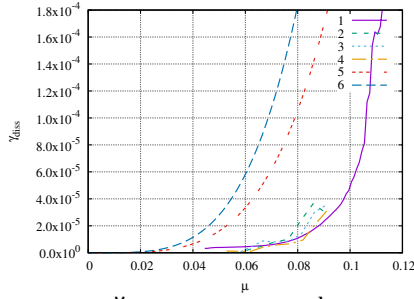


Рисунок 15 — Диссипативный член γ_{diss} как функция от средней крутизны. Результат трёхмерного и двумерного экспериментов. Кривая 1 — полностью нелинейный двумерный эксперимент; кривая 2 — трёхмерный эксперимент, производная посчитана на промежутке времени от $70T_0$ до $80T_0$; кривая 3 — трёхмерный эксперимент, производная посчитана на промежутке времени от $80T_0$ до $90T_0$; кривая 4 — трёхмерный эксперимент, производная посчитана на промежутке времени от $90T_0$ до $100T_0$; кривая 5 — $2.58\mu^4$, что соответствует модели *WAM3* для волнового пакета в форме $\delta(\mathbf{k})$; кривая 6 — $4.48\mu^4$, что соответствует модели *WAM4* для волнового пакета в форме $\delta(\mathbf{k})$.

при смещении в область длинных волн. Моделировалась затухающая турбулентность для начального спектра в виде гауссианы, расположенной вокруг точки $\mathbf{k}_0 = (0; 100)$ с шириной $D_i = 30$. Амплитуды всех гармоник были случайны со следующим средним $|a_{\mathbf{k}}| = A_i \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|^2}{D_i^2}\right)$ для $|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| \leq 2D_i$; $|a_{\mathbf{k}}| = 10^{-12}$ для $|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| > 2D_i$. Случайные значения фаз были равномерно распределены на интервале $[0; 2\pi)$. Значение амплитуды A_i менялось так, чтобы обеспечить требуемые значения средней крутизны, которые принадлежали интервалу от 0.05 до 0.09. Результаты вычисленной функции затухания представлены на Рис. 15 в сравнении с функциями, используемыми в некоторых моделях ветрового волнения. Для верификации моделирования слабонелинейных уравнений в трёхмерном случае коллегами было произведено моделирование в полных двумерных уравнениях, описанных в предыдущей главе с количественным совпадением в рассматриваемом диапазоне крутизн. Таким образом, было показано, что как минимум в некоторых моделях ветрового волнения затухание, вызванное образованием пены на гребнях волн, переоценивается кратно, что ведёт к неминуемым проблемам с физической моделью.

При исследовании динамики сдвига спектрального пика в область больших масштабов, представленном в разделе 4.4, был обнаружен новый режим волновой турбулентности в конечных системах — мезоскопическая турбулентность [A13], являющаяся промежуточным состоянием между преимущественно почти линейными волнами (аналогия с заквазированной системой) и режимом, хорошо описываемым кинетическим уравнением для гравитационных волн (уравнение Хассельманна) (большое количество взаимодействующих гармоник,

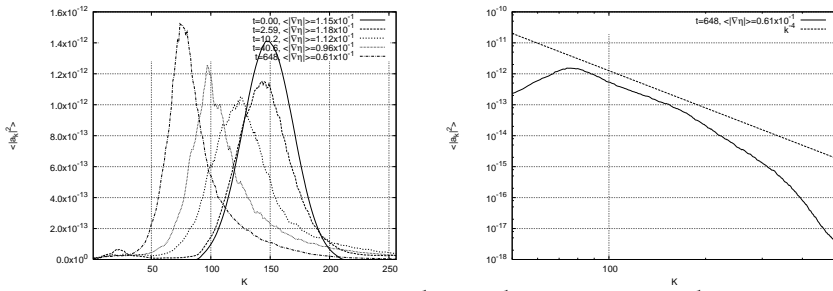


Рисунок 16 — Сдвиг со временем в область больших масштабов спектрального пика (слева). Сформировавшийся слаботурбулентный хвост распределения, близкий к спектру Захарова-Филоненко прямого каскада гравитационных волн (справа).

аналогия с квантовой жидкостью). В данном режиме сохраняется качественное соответствие детерминистического описания в рамках динамических уравнений и статистического описания в рамках уравнения Хассельманна. Наблюдался сдвиг спектрального максимума в сторону больших масштабов и формирование хвоста распределения, близкого к спектру Захарова-Филоненко прямого каскада гравитационных волн, что показано на Рис. 16, однако скорость движения спектрального пика и убывание интегральных параметров системы происходили не по законам, следующим из кинетического уравнения Хассельманна. Объяснением этому было наличие значительного количества гармоник в спектральном пике, но слишком низком для формирования достаточного статистического ансамбля. Причиной являлось усиливающееся упоминавшееся выше влияние дискретности сетки волновых векторов при смещении спектра в сторону $k = 0$.

Изложенные в четвёртой главе результаты опубликованы в [A9—A13].

В **пятой главе** применяется статистическое описание нелинейных процессов в волновых системах в рамках кинетического уравнения и исследуются границы его применимости. Применение кинетического уравнения для волн на воде началось с работ Хассельманна [22] и Захарова [49]. В данной главе в основном рассматривается вопрос верификации кинетического уравнения для четырёхволнового процесса «два в два», в случае гравитационных волн на поверхности жидкости называемого уравнением Хассельманна. Это уравнение на динамику парного коррелятора $\langle b_k b_{k'}^* \rangle = N_k \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$, где b_k получается из переменных a_k , введённых в предыдущей главе, после канонического преобразования (Пуанкаре), зануляющего запрещённые для гравитационных волн трёхволновые процессы, $\langle \cdot \rangle$ — усреднение по ансамблю. N_k имеет смысл спектральной плотности распределения вероятности возбуждений. Уравнение Хассельманна имеет следующий вид:

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} = st(N, N, N) + f_p(\mathbf{k}) - f_d(\mathbf{k}), \quad (14)$$

Здесь $st(N, N, N)$ – это так называемый интеграл столкновений:

$$st(N, N, N) = 4\pi \int \left| T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} \right|^2 N_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}_1} N_{\mathbf{k}_2} N_{\mathbf{k}_3} \left(\frac{1}{N_{\mathbf{k}}} + \frac{1}{N_{\mathbf{k}_1}} - \frac{1}{N_{\mathbf{k}_2}} - \frac{1}{N_{\mathbf{k}_3}} \right) \times \\ \times \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \delta(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}_2} - \omega_{\mathbf{k}_3}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3.$$

Данное кинетическое уравнение и его модификации являются основой для всех моделей предсказания ветрового волнения. Вся физика содержится в T [7] и $\omega_{\mathbf{k}}$. Это же уравнение описывает, к примеру, волновую турбулентность в нелинейном уравнении Шрёдингера. Неконсервативные члены $f_p(\mathbf{k})$ и $f_d(\mathbf{k})$ моделируют накачку и затухание. Данное уравнение имеет ряд точных стационарных решений, из которых важнейшими являются решения с постоянным потоком [50], описывающие состояние динамического равновесия. Они формулируются для инерционного интервала (интервала масштабов, вне накачки и затухания, где работают только нелинейные взаимодействия) и соответствуют нулю интеграла столкновений. В силу главенствующего процесса в системе есть дополнительный интеграл движения: волновое действие или число возбуждений $N = \int N_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}$. Его поток соответствует обратному каскаду, от малых масштабов к большим, а поток энергии направлен от больших масштабов к малым. Для изотропных гравитационных волн (в пренебрежении капиллярностью) на поверхности трёхмерной глубокой жидкости решения для прямого и обратного каскадов имеют вид [7]:

$$N_k^{(1)} = C_1 P^{1/3} k^{-4}, \quad N_k^{(2)} = C_2 Q^{1/3} k^{-23/6} \approx const \ k^{-3.83}, \quad (15)$$

где P – поток энергии, Q – поток волнового действия, C_1 и C_2 – константы. Данные спектры являются примером более общих спектров Колмогорова-Захарова [50]. Решение $N_k^{(1)}$ также называется спектром Захарова-Филоненко [51] и наблюдалось в численном эксперименте [21; 52].

Прежде чем переходить к более сложному уравнению Хассельманна, в разделе 5.1 рассматривается случай одномерного дефокусирующего нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ) пятой степени, где нелинейный процесс шести-волновой, а именно рассеяние «три в три»:

$$iu_t + u_{xxx} - \mu |u|^4 u = 0. \quad (16)$$

В случае НУШ $T = \mu = const$, что наряду с одномерностью сильно упрощает рассмотрение. Дисперсионное соотношение $\omega_k = k^2$. В «кинетических» единицах времени τ , кинетическое уравнение для $n_k = \langle |u_k|^2 \rangle$ имеет вид [53]:

$$\frac{dn_k}{d\tau} = \int n_k n_{k_1} n_{k_2} n_{k_3} n_{k_4} n_{k_5} \left(\frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_{k_1}} + \frac{1}{n_{k_2}} - \frac{1}{n_{k_3}} - \frac{1}{n_{k_4}} - \frac{1}{n_{k_5}} \right) \times \\ \times \delta(k + k_1 + k_2 - k_3 - k_4 - k_5) \delta(\omega_k + \omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3} - \omega_{k_4} - \omega_{k_5}) \times \\ \times dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 dk_5. \quad (17)$$

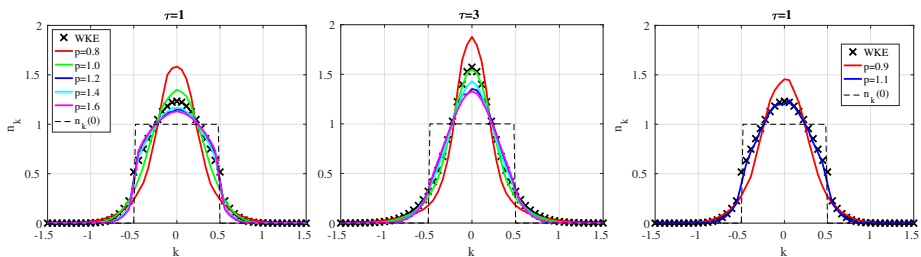


Рисунок 17 — Моделирование динамики волнового поля в динамическом и кинетическом уравнениях. Критерий применимости кинетического уравнения $p > 1$. В момент времени $\tau = 1$ (слева) и при $\tau = 3$ (центр) показано, что для разных значений p выше порога имеется количественное совпадение. В то же время, при даже небольшом отклонении от критерия (справа) уже при времени $\tau = 1$ количественного совпадения нет. Штриховая линия – начальное условие.

В работе [A14] удалось вывести критерии применимости описания волнового поля непрерывным кинетическим уравнением для волн (17), в сравнении с усреднённым по 1000 реализаций начальных условий автокоррелятору $n_k = \langle |u_k|^2 \rangle$, причём u_k моделировалось в периодических граничных условиях по координате. Результаты представлены на Рис. 17. Одним из критериев применимости было условие на безразмерный параметр $p > 1$. Видно, что даже при небольшом нарушении порога применимости количественное совпадение графиков перестаёт иметь место.

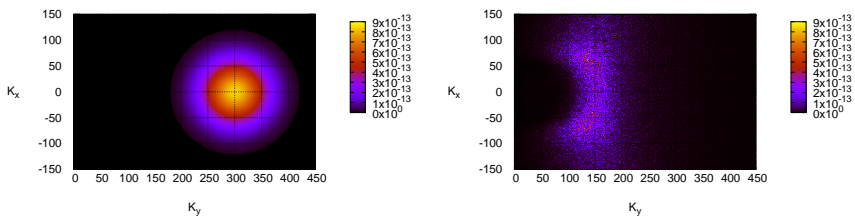


Рисунок 18 — Начальные условия (слева) моделирования в рамках динамических уравнений из раздела 5.3 и конечный результат (справа). Цветом показаны уровни поверхности $|a_k|^2$. Виден сдвиг спектра в область больших масштабов. Конечный момент при пересчёте в реальные единицы соответствует распространению на протяжении ≈ 153 минут.

Прямое сравнение моделирования гравитационных волн в динамических уравнениях (11) и кинетическом уравнении Хассельманна (14) предпринято в разделе 5.2. При изначально гладком по амплитуде начальном условии, на сетке с высоким разрешением 4096×512 в направлении преимущественного движения волн, был продемонстрирован сдвиг в область больших масштабов [A17;

A18], имеющий место и в реальных морях и океанах, со стохастизацией модулей амплитуд к ансамблю с распределением, близким к гауссову, что показано на Рис.18.

Также было продемонстрировано, что для данных из динамических уравнений, в распределениях вероятностей значений градиентов и амплитуд отклонений жидкости от положения равновесия появляются заметные негауссовы хвосты [A18], что означает сосуществование слабой и сильной волновой турбулентности. Коллегам, занимавшимся моделированием в рамках уравнения Хассельманна, удалось подобрать новую форму феноменологического диссипативного члена, который дал хорошее согласие с вычислениями в рамках динамических уравнений [A17]. Некоторые из этих результатов представлены на Рис. 19.

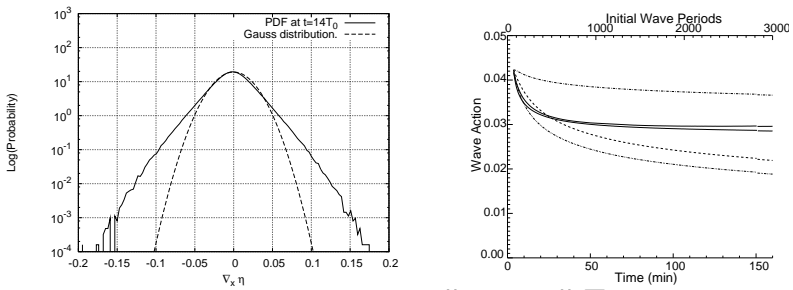


Рисунок 19 — Распределение вероятностей значений $\nabla_x \eta$ в промежуточный момент времени (слева). Видны сильные негауссовы хвосты функции распределения. Затухание полного волнового действия в системе при моделировании в рамках динамических уравнений (сплошная линия) и кинетического уравнения (штриховые и штрих-пунктирные линии) с феноменологическими диссипативными членами из некоторых моделей прогнозирования ветрового волнения. Результат моделирования в рамках уравнения Хассельманна с предложенным новым диссипативным членом показан толстой сплошной линией.

В разделе 5.3 для верификации уравнения Хассельманна (14) использован другой, менее прямой подход через проверку существования решений кинетического уравнения, а именно спектров Колмогорова-Захарова (15), при моделировании в рамках динамических уравнений (11). В данном разделе на сетках от 128×128 до 1024×1024 точек моделировалась изотропная турбулентность с накачкой. Было получено формирование обоих каскадов (15) с появлением конденсата [A15]. Было предложено объяснение [A16] отклонению спектра прямого каскада от значений, полученных в других экспериментах [19; 21; 52], посредством механизма прямого влияния конденсата и обратного каскада, отсутствовавших в предыдущих экспериментах, на прямой каскад. На Рис. 20 показано, что после искусственного подавления конденсата и большей части обратного каскада спектр прямого каскада вернулся к наклону, близкому к (15).

Таким образом, опять подтверждена применимость уравнения Хассельманна к описанию гравитационных волн как минимум при выполнении некоторых условий.

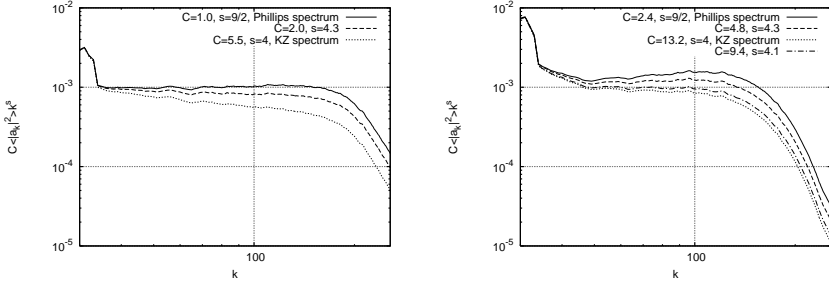


Рисунок 20 — Компенсированные спектры прямого каскада изотропной турбулентности гравитационных волн в присутствии конденсата и обратного каскада (слева) и после подавления и конденсата, и обратного каскада (справа). Видно, что наклон, соответствующий спектру Филлипса $\sim k^{-9/2}$, изменился практически до спектра Колмогорова-Захарова $\sim k^{-4}$.

Завершает главу 5 раздел 5.4, где в рамках динамических уравнений (11) произведено моделирование изотропной турбулентности гравитационных волн в рамках динамических уравнений (11) с формированием обратного каскада в широком динамическом диапазоне, позволяющем определить наклон спектра. Формирование обратного каскада – исключительно медленный процесс, поэтому наблюдение обратного каскада в существенном динамическом диапазоне является гораздо большим вызовом по сравнению с моделированием прямого каскада гравитационных волн. Ожидается наблюдение и формирование конденсата. В результате моделирования с четырьмя различными уровнями накачки [A19], покрывающими большую часть диапазона уровней нелинейности (крутизна), релевантного для реализуемости нелинейных взаимодействий волн, обнаружен новый универсальный спектр $\sim k^{-3.07}$ обратного каскада в присутствии конденсата, значительно отличающийся от предсказываемого теорией волновой турбулентности спектра Колмогорова-Захарова $\sim k^{-23/6}$. Эти результаты представлены на Рис. 21. Интересно отметить, что новый универсальный спектр близок к наблюдавшемуся в лаборатории спектру обратного каскада $\approx k^{-3}$ [54]. После изучения структуры конденсата и установления, что он имеет стохастический характер (соседние гармоники могут иметь амплитуды, различающиеся в разы и больше), совместно с коллегами было предложено развить описание взаимодействия конденсата и обратного каскада в рамках кинетического уравнения Хассельманна (14). Для этого была вычислена аналитическая асимптотика матричного элемента взаимодействия волн $T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}$ для масштабов малых, по сравнению с характерным масштабом конденсата, моделируемого бесконечно тонким кольцом. После чего для кинетического уравнения

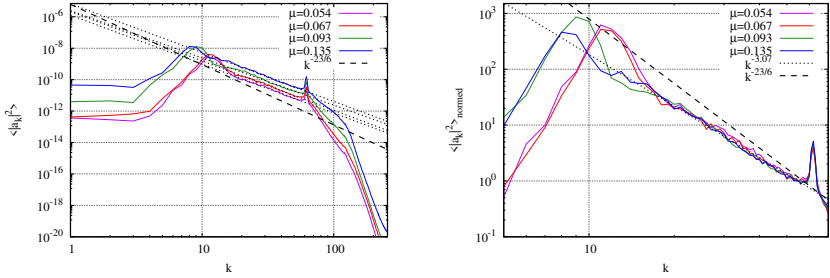


Рисунок 21 — Результаты моделирования распространения обратного каскада (слева) для четырёх различных уровней накачки в виде усреднённых по углу спектров $|a_k|^2$. Видно, что остановка продвижения обратного каскада происходит тем ближе к $k = 0$, чем выше уровень нелинейности (средней крутизны поверхности μ). Накачка видна в виде небольшого пика около $k = 64$. Конденсат сформировался в районе $k \approx 10$. После перенормировки кривых на постоянный множитель видно (справа), что их наклоны $\sim k^{-3,07}$ совпадают с точностью до флуктуаций и при этом существенно отличаются от предсказываемого теорией волновой турбулентности спектра обратного каскада гравитационных волн Колмогорова-Захарова $\sim k^{-23/6}$, показанного штриховой линией.

Хассельманна было выведено приближение в виде уравнения диффузии в k -пространстве [A20]:

$$2\pi k \frac{\partial N_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial k} D_k \frac{\partial N_k}{\partial k}.$$

с неоднородным коэффициентом

$$D_k = 8\pi^2 k \int_{k_1 \ll k} N_{k_1}^2 k_1^{9/2} \frac{25(kk_1)^3}{256\pi^2} dk_1.$$

Таким образом, $D_k \sim k^4$ и если мы ищем стационарное решение с постоянным потоком, то получаем:

$$\text{const} = k^4 \frac{\partial N_k}{\partial k} \Rightarrow \frac{\partial N_k}{\partial k} \sim \frac{\text{const}}{k^4} \Rightarrow N_k \sim k^{-3}.$$

Что достаточно близко к спектру с наклоном $N_k \sim k^{-3,07}$, наблюдавшемуся в описанной выше работе [A19].

Изложенные в пятой главе результаты опубликованы в [A14—A20].

Приложения содержат технические подробности вычислений и вспомогательные результаты.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые состоят в следующем:

1. Доказана путём аналитических оценок и численного моделирования осуществимость предлагаемого способа связи с гиперзвуковыми аппаратами при вхождении в плотные слои атмосферы, основанного на использовании нелинейного взаимодействия волн в плазме, когда формирующееся вокруг тела плазменное облако препятствует связи на сравнительно низких частотах. Это позволяет предложить одно из решений проблемы временного пропадания радиосвязи с пилотируемыми космическими аппаратами при возвращении на Землю.
2. Построена теория фазовой кросс-модуляции для поверхностных магнитостатических спиновых волн, выведены условия возникновения модуляционной неустойчивости. Развитая теория фазовой кросс-модуляции поверхностных магнитостатических спиновых волн используется для объяснения данных эксперимента одновременного распространения поверхностных волн на двух частотах в железо-иттриевом гранате.
3. Получено аналитически и исследовано численно точное решение в виде уединённой волны для модели Максвелла-Даффинга, описывающей распространение оптических импульсов в противоположных направлениях в Брэгговских решётках с нелинейным взаимодействием. Исследовано численно распространение импульсов в активной среде с Λ -конфигурацией уровней в рамках модели Максвелла-Блоха при возможности распространения света в противоположных направлениях, что является характерным для метаматериалов с отрицательным показателем преломления. Обнаружено возникновение самозахвата импульсов через нелинейное взаимодействие. Исследование распространения света в брэгговских решётках с нелинейностью и в среде с Λ -конфигурацией уровней при наличии волн, распространяющихся в обоих направлениях, позволяет предложить эксперименты в метаматериалах с отрицательным эффективным показателем преломления, а также рассмотреть возможные применения обнаруженных эффектов для проектирования перспективных оптических устройств.
4. В результате массивного численного моделирования подтверждён новый механизм неустойчивости при распространении мощного лазерного излучения в плазме, характерной для установок лазерного управляемого термоядерного синтеза, что позволило рекомендовать изменения в таких установках, снижающие вероятность катастрофического повреждения оптической системы.
5. Вычислены с высокой (близкой к квадратичной) точностью решения в виде волн Стокса разного уровня нелинейности. Библиотека полученных решений доступна для сообщества на открытом ресурсе в сети Интернет. Используя полученные решения, дана новая, более точная по сравнению с предыдущими, оценка крутизны (амплитуды) предельной волны Стокса. Получены численно инкременты неустойчивости для

- волн Стокса в новом, недостижимом ранее, диапазоне крутиз (нелинейностей). Это не только открывает новые возможности для развития теории гравитационных волн на воде, но и предоставляет эффективный инструмент тестирования новых кодов для моделирования нелинейных волн на поверхности жидкости.
6. Построена аналитическая теория кольцевой неустойчивости стоячей волны на поверхности трёхмерной жидкости. Продемонстрирована кольцевая неустойчивость гравитационных и капиллярных стоячих волн, что позволило предложить новые экспериментальные техники по возбуждению изотропного волнового поля, что является одной из стандартных постановок для экспериментов по верификации теории волновой турбулентности.
 7. Промерен прямым численным моделированием закон дисперсии гравитационных волн на поверхности трёхмерной жидкости в присутствии сильного длинноволнового фона (конденсата). Показано, что, хотя ширина линии остаётся сравнительно узкой, пренебрегать отклонением дисперсионного закона от линейного, т.е. взаимодействием с конденсатом, уже нельзя. Это накладывает ограничения на применимость классических решений Колмогорова-Захарова в виде спектров прямого и обратного каскадов в конечных системах в присутствии конденсата.
 8. Измерена прямым методом зависимость затухания волнового спектра от крутизны (меры нелинейности) при смещении в область длинных волн, что позволяет продвинуться в направлении теории, описывающей феноменологические члены диссипации в кинетическом уравнении Хассельманна, характерные для моделей ветрового волнения. В частности, показано, что ряд предложенных форм диссипативных членов существенно переоценивает вклад данного механизма.
 9. Обнаружен новый режим волновой турбулентности в конечных системах – мезоскопическая турбулентность, являющийся промежуточным состоянием между почти линейными волнами и режимом, хорошо описываемым кинетическим уравнением для гравитационных волн (уравнение Хассельманна). В данном режиме сохраняется качественное соответствие детерминистического описания в рамках динамических уравнений и статистического описания в рамках уравнения Хассельманна. Продемонстрирована возможность сосуществования сильной и слабой турбулентности для гравитационных волн на поверхности трёхмерной жидкости. Проведено прямое сравнение детерминистского и статистического описаний волнового поля. Всё это позволило объяснить расхождение результатов моделирования в рамках кинетического уравнения Хассельманна и экспериментов по наблюдению ветрового волнения.

10. Для модели шестиволнового одномерного нелинейного уравнения Шрёдингера продемонстрирован пороговый характер условий применимости кинетического уравнения для описания параметров волнового поля. Детальное исследование применимости кинетического волнового уравнения в случае шестиволнового взаимодействия, примененного для описания динамики спектральной функции распределения для волн в волоконно-оптических линиях связи, дало возможность понять механизмы проявления нарушения предположений, в которых выводится кинетическое уравнение для волн. В свою очередь это позволяет продвинуться к лучшему пониманию применимости кинетического уравнения для волн в общем смысле, включая кинетическое уравнение Хассельманна, являющееся основанием для моделей предсказания ветрового волнения.
11. В рамках динамических уравнений для гравитационных волн на поверхности трёхмерной жидкости продемонстрировано одновременное формирование спектров прямого и обратного каскадов волновой турбулентности с образованием сильного длинноволнового фона (конденсата). Показано, что присутствие конденсата может привести к изменению спектра прямого каскада от спектра Захарова-Филоненко до спектра Филлипса. Представлен возможный механизм данного явления. Это позволило подтвердить применимость теории волновой турбулентности Захарова и осуществимость решений Колмогорова-Захарова как минимум в некотором диапазоне параметров волнового поля.
12. При массивном численном моделировании турбулентности гравитационных волн в рамках динамических уравнений в присутствии конденсата открыт новый универсальный спектр обратного каскада. Предложено возможное аналитическое объяснение нового спектра в рамках кинетического уравнения для волн (Хассельманна), что позволило объяснить ряд экспериментальных наблюдений и прояснить характер главенствующих нелинейных процессов в конечных системах, в частности, в лабораторных волновых бассейнах.

Публикации автора по теме диссертации

- A1. *Korotkevich, A. O.* Communication through plasma sheaths [Текст] / A. O. Korotkevich, A. C. Newell, V. E. Zakharov // Journal of Applied Physics. — 2007. — Окт. — Т. 102, № 8. — С. 083305. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.2794856>.
- A2. *Короткевич, А. О.* Фазовая кросс-модуляция поверхностных магнитостатических спиновых волн [Текст] / А. О. Короткевич, С. А. Никитов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1999. — Т. 116, № 6. — С. 2058—2068. — URL: <http://www.jetp.ras.ru/cgi-bin/e/index/r/116/6/p2058?a=list>.

- A3. Маймистов, А. И. Когерентное распространение оптического импульса в брэгговской плазмонной решетке [Текст] / А. И. Маймистов, И. Р. Габитов, А. О. Короткевич // Квантовая электроника. — 2007. — Т. 37, № 6. — С. 549—553. — URL: <https://www.mathnet.ru/rus/qe/v37/i6/p549>.
- A4. Solitary waves in plasmonic Bragg gratings [Текст] / I. R. Gabitov [и др.] // Applied Physics A. — 2007. — Т. 89, вып. 2. — С. 277—281. — URL: <https://doi.org/10.1007/s00339-007-4102-x>.
- A5. Optical pulse dynamics in active metamaterials with positive and negative refractive index [Текст] / А. О. Korotkevich [и др.] // J. Opt. Soc. Am. B. — 2013. — Апр. — Т. 30, № 4. — С. 1077—1084. — URL: <https://doi.org/10.1364/JOSAB.30.001077>.
- A6. Korotkevich, A. O. Beyond the random phase approximation: Stimulated Brillouin backscatter for finite laser coherence times [Текст] / А. О. Korotkevich, P. M. Lushnikov, H. A. Rose // Physics of Plasmas. — 2015. — Янв. — Т. 22, № 1. — С. 012107. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.4906057>.
- A7. Dyachenko, S. A. Branch Cuts of Stokes Wave on Deep Water. Part I: Numerical Solution and Padé Approximation [Текст] / S. A. Dyachenko, P. M. Lushnikov, A. O. Korotkevich // Studies in Applied Mathematics. — 2016. — Т. 137, № 4. — С. 419—472. — URL: <https://doi.org/10.1111/sapm.12128>.
- A8. Superharmonic instability of Stokes waves [Текст] / А. О. Korotkevich [и др.] // Studies in Applied Mathematics. — 2023. — Т. 150, № 1. — С. 119—134. — URL: <https://doi.org/10.1111/sapm.12535>.
- A9. Korotkevich, A. O. Numerical simulation of surface waves instability on a homogeneous grid [Текст] / А. О. Korotkevich, A. I. Dyachenko, V. E. Zakharov // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2016. — Т. 321/322. — С. 51—66. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2016.02.017>.
- A10. Korotkevich, A. O. Direct numerical experiment on measurement of the dispersion relation for gravity waves in the presence of the condensate [Текст] / А. О. Korotkevich // Письма в ЖЭТФ. — 2013. — Т. 97, № 3/4. — С. 145—149. — URL: http://www.jetpletters.ru/ps/1997/article_30156.shtml.
- A11. Korotkevich, A. O. Evaluation of a spectral line width for the Phillips spectrum by means of numerical simulation [Текст] / А. О. Korotkevich, V. E. Zakharov // Nonlinear Processes in Geophysics. — 2015. — Т. 22, № 3. — С. 325—335. — URL: <https://doi.org/10.5194/npg-22-325-2015>.
- A12. Короткевич, А. О. О темпе диссипации океанских волн, вызванной их обрушением [Текст] / А. О. Короткевич, А. О. Прокофьев, В. Е. Захаров // Письма в ЖЭТФ. — 2019. — Т. 109, вып. 5. — С. 312—319. — URL: <https://doi.org/10.1134/S0370274X19050060>.
- A13. Mesoscopic Wave Turbulence [Текст] / V. E. Zakharov [и др.] // Письма в ЖЭТФ. — 2005. — Т. 82, № 8. — С. 544—548. — URL: http://jetpletters.ru/ps/0/article_15969.shtml.

- A14. Direct Verification of the Kinetic Description of Wave Turbulence for Finite-Size Systems Dominated by Interactions among Groups of Six Waves [Текст] / J. W. Banks [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2022. — Т. 129, вып. 3. — С. 034101. — URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.129.034101>.
- A15. *Korotkevich, A. O.* Simultaneous numerical simulation of direct and inverse cascades in wave turbulence [Текст] / A. O. Korotkevich // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Т. 101, № 7. — С. 074504. — URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.074504>.
- A16. *Korotkevich, A. O.* Influence of the condensate and inverse cascade on the direct cascade in wave turbulence [Текст] / A. O. Korotkevich // Math. Comput. Simul. — 2012. — Т. 82, № 7. — С. 1228—1238. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2010.07.009>.
- A17. Coexistence of weak and strong wave turbulence in a swell propagation [Текст] / V. E. Zakharov [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2007. — Т. 99, № 16. — С. 164501. — URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.99.164501>.
- A18. Numerical Verification of the Weak Turbulent Model for Swell Evolution [Текст] / A. O. Korotkevich [и др.] // European Journal of Mechanics - B/Fluids. — 2008. — Т. 27, № 4. — С. 361—387. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2007.08.004>.
- A19. *Korotkevich, A. O.* Inverse Cascade Spectrum of Gravity Waves in the Presence of a Condensate: A Direct Numerical Simulation [Текст] / A. O. Korotkevich // Phys. Rev. Lett. — 2023. — Июнь. — Т. 130, вып. 26. — С. 264002. — URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.130.264002>.
- A20. Non-local gravity wave turbulence in presence of condensate [Текст] / A. O. Korotkevich [и др.] // Journal of Fluid Mechanics. — 2024. — Т. 992. — A1. — URL: <https://doi.org/10.1017/jfm.2024.423>.

Список литературы

1. *Whitham, G. B.* Linear and Nonlinear Waves [Текст] / G. B. Whitham. — New York : Wiley-Interscience, 1974.
2. *Балакин, А. А.* Основы теории нелинейных колебаний и волн [Текст] / А. А. Балакин, И. Ю. Костюков, Г. М. Фрайман. — Долгопрудный : ИД Интеллект, 2020.
3. *Камчатнов, А. М.* Теория нелинейных волн [Текст] / А. М. Камчатнов. — Москва : Изд. дом Высшей школы экономики, 2024.
4. *Розанов, Н. Н.* Диссипативные оптические и родственные солитоны [Текст] / Н. Н. Розанов. — Москва : Физматлит, 2021.
5. *Newell, A. C.* Solitons in Mathematics and Physics [Текст] / A. C. Newell. — Philadelphia : Society for Industrial, Applied Mathematics, 1985.

6. Теория солитонов: метод обратной задачи [Текст] / В. Е. Захаров [и др.]. — Москва : Наука, 1980.
7. *Zakharov, V. E.* Kolmogorov Spectra of Turbulence I [Текст] / V. E. Zakharov, V. S. Lvov, G. Falkovich. — Berlin : Springer-Verlag, 1992. — URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-50052-7>.
8. *Nazarenko, S. V.* Wave Turbulence [Текст] / S. V. Nazarenko. — Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2011.
9. Mesoscopic Wave Turbulence [Text] / V. E. Zakharov [et al.] // JETP Lett. — 2005. — Vol. 82, no. 8. — P. 487—491. — URL: <https://doi.org/10.1134/1.2150867>.
10. *Nazarenko, S. V.* Communication through plasma sheaths via Raman (three-wave) scattering process [Текст] / S. V. Nazarenko, A. C. Newell, V. E. Zakharov // Physics of Plasmas. — 1994. — Сент. — Т. 1, № 9. — С. 2827—2834. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.870521>.
11. *Agrawal, G.* Nonlinear Fiber Optics [Текст] / G. Agrawal. — Academic Press, 2012.
12. *Stokes, G. G.* On the theory of oscillatory waves [Текст] / G. G. Stokes // Transactions of the Cambridge Philosophical Society. — 1847. — Т. 8. — С. 441—455.
13. *Stokes, G. G.* On the theory of oscillatory waves [Текст] / G. G. Stokes // Mathematical and Physical Papers. — 1880. — Т. 1. — С. 197—229.
14. *Sretenskii, L. N.* Theory of wave motion of fluid [Текст] / L. N. Sretenskii. — Moscow : Nauka, 1976.
15. *Zakharov, V. E.* Freak waves as nonlinear stage of Stokes wave modulation instability [Текст] / V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, A. O. Prokofiev // Eur. J. Mech. B - Fluids. — 2006. — Т. 25, № 5. — С. 677—692.
16. *Zakharov, V. E.* Energy Spectrum for Stochastic Oscillations of the Surface of a Liquid [Текст] / V. E. Zakharov, N. N. Filonenko // Sov. Phys. Dokl. — 1967. — Т. 11. — С. 881—884.
17. *Zakharov, V. E.* The kinetic equation and Kolmogorov spectra in the weak turbulence theory of wind waves [Текст] / V. E. Zakharov, M. M. Zaslavskii // Izv. Atm. Ocean. Phys. — 1982. — Т. 18. — С. 747—753.
18. *Pushkarev, A. N.* Turbulence of Capillary Waves [Текст] / A. N. Pushkarev, V. E. Zakharov // Phys. Rev. Lett. — 1996. — Апр. — Т. 76, вып. 18. — С. 3320—3323. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.76.3320>.
19. Freely decaying weak turbulence for sea surface gravity waves [Текст] / M. Onorato [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2002. — Т. 89. — С. 144501. — URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.144501>.

20. *Dyachenko, A. I.* Weak turbulence of gravity waves [Текст] / A. I. Dyachenko, A. O. Korotkevich, V. E. Zakharov // Письма в ЖЭТФ. — 2003. — Т. 77, № 10. — С. 649—653. — URL: http://jetpletters.ru/ps/0/article_462.shtml.
21. *Dyachenko, A. I.* Weak turbulent Kolmogorov spectrum for surface gravity waves [Текст] / A. I. Dyachenko, A. O. Korotkevich, V. E. Zakharov // Phys. Rev. Lett. — 2004. — Т. 92, № 13. — С. 134501. — URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.134501>.
22. *Hasselmann, K.* On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum Part 1. General theory [Текст] / K. Hasselmann // J. Fluid Mech. — 1962. — Т. 12, № 4. — С. 481—500.
23. *Donelan, M. A.* Directional spectra of wind generated waves [Текст] / M. A. Donelan, J. Hamilton, W. H. Hui // Phil. Trans. R. Soc. London. — 1985. — Т. A315. — С. 509.
24. Airborne Measurements of the Wavenumber Spectra of Ocean Surface Waves. Part I: Spectral Slope and Dimensionless Spectral Coefficient [Текст] / P. A. Hwang [и др.] // J. Phys. Oceanogr. — 2000. — Т. 30. — С. 2753—2767.
25. *Denissenko, P.* Gravity wave turbulence in a laboratory flume [Текст] / P. Denissenko, S. Lukaschuk, S. V. Nazarenko // Phys. Rev. Lett. — 2007. — Т. 99. — С. 014501.
26. *Гинзбург, В. Л.* Электромагнитные волны в плазме [Текст] / В. Л. Гинзбург. — 2е. — Москва : Наука, 1967.
27. *Nazarenko, S. V.* Communication with reentry space vehicles via short pulses [Текст] / S. V. Nazarenko, A. C. Newell, A. M. Rubenchik // Radio Science. — 1995. — Т. 30, № 6. — С. 1753—1766.
28. *Nazarenko, S. V.* Resonant absorption of short pulses [Текст] / S. V. Nazarenko, A. C. Newell, A. M. Rubenchik // Phys. Lett. A. — 1995. — Т. 197, № 2. — С. 159—163.
29. Nonlinear magnetostatic surface waves in ferromagnetic films [Текст] / A. Boardman [и др.] // IEEE Transactions on Magnetics. — 1994. — Т. 30, № 1. — С. 14—22.
30. Observation of cross-phase induced modulation instability of travelling magnetostatic waves in ferromagnetic films [Текст] / J. Boyle [и др.] // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. — 1997. — Т. 173, № 3. — С. 241—252. — URL: [https://doi.org/10.1016/S0304-8853\(97\)00192-3](https://doi.org/10.1016/S0304-8853(97)00192-3).
31. *Гуревич, А. Г.* Магнитные колебания и волны [Текст] / А. Г. Гуревич, Г. Мелков. — Москва : Физматлит, 1994.

32. Раутиан, С. Г. Нелинейная спектроскопия насыщения вырожденного электронного газа в сферических частицах металла [Текст] / С. Г. Раутиан // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1997. — Т. 112, вып. 3. — С. 836—855. — URL: <https://jetp.ras.ru/cgi-bin/e/index/r/112/3/p836?a=list>.
33. Драчёв, В. П. Квантовая теория нелинейной плазмоники С.Г. Раутиана [Текст] / В. П. Драчёв // Автометрия. — 2024. — Т. 60, вып. 1. — С. 27—37. — URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=62736728>.
34. Chiao, R. Y. Stimulated Brillouin Scattering and Coherent Generation of Intense Hypersonic Waves [Текст] / R. Y. Chiao, C. H. Townes, B. P. Stoicheff // Phys. Rev. Lett. — 1964. — Май. — Т. 12, вып. 21. — С. 592—595. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.12.592>.
35. Веб-страничка National Ignition Facility [Electronic Resource]. — 2026. — URL: <https://lasers.llnl.gov/> (visited on 03/25/2026).
36. Lushnikov, P. M. Collective stimulated Brillouin backscatter [Текст] / P. M. Lushnikov, H. A. Rose. — 2007. — URL: <http://arxiv.org/abs/0710.0634>.
37. Lushnikov, P. M. Instability Versus Equilibrium Propagation of a Laser Beam in Plasma [Текст] / P. M. Lushnikov, H. A. Rose // Phys. Rev. Lett. — 2004. — Июнь. — Т. 92, вып. 25. — С. 255003. — URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.255003>.
38. Ovsyannikov, L. V. Dynamics of a fluid [Текст] / L. V. Ovsyannikov // М.А. Lavrent'ev Institute of Hydrodynamics Sib. Branch USSR Ac. Sci. — 1973. — Т. 15. — С. 104—125.
39. Analytical description of the free surface dynamics of an ideal fluid (canonical formalism and conformal mapping) [Текст] / А. И. Dyachenko [и др.] // Phys. Lett. A. — 1996. — Т. 221. — С. 73—79.
40. Dyachenko, S. A. The complex singularity of a Stokes wave [Текст] / S. A. Dyachenko, P. M. Lushnikov, А. О. Korotkevich // Письма в ЖЭТФ. — 2013. — Т. 98, № 11. — С. 767—771. — URL: http://www.jetpletters.ru/ps/2027/article_30557.shtml.
41. Коллекция волн Стокса различной амплитуды, вычисленных с четверной и выше точностью. <http://stokeswave.org> [Electronic Resource] / S. A. Dyachenko [et al.]. — 2015-2025. — URL: <http://stokeswave.org> (visited on 06/21/2025).
42. Longuet-Higgins, M. S. The instabilities of gravity waves of finite amplitude in deep water I. Superharmonics [Текст] / M. S. Longuet-Higgins // Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences. — 1978. — Апр. — Т. 360, № 1703. — С. 471—488. — URL: <https://doi.org/10.1098/rspa.1978.0080>.

43. *Короткевич, А. О.* Четвертая ветвь неустойчивости волны Стокса и зависимость соответствующих инкрементов от нелинейности [Текст] / А. О. Короткевич, А. О. Прокофьев // Письма в ЖЭТФ. — 2026. — Т. 123, вып. 3. — С. 198—203. — URL: http://jetpletters.ru/ps/2533/article_37073.shtml.
44. *Kartashova, E.* Resonant Interactions of Rossby waves in Bounded Domains [Текст] : дис. ... канд. / Kartashova Elena. — P.P. Shirshov Institute for Oceanology, USSR Academy of Sciences, Moscow, 12.1990.
45. *Kartashova, E.* Wave resonances in systems with discrete spectra [Текст] / E. Kartashova // Nonlinear Waves and Weak Turbulence. AMS Translations - Series 2. Т. 182 / под ред. V. E. Zakharov. — Providence, RI, USA : American Mathematical Society, 1998. — С. 95—129. — URL: <https://bookstore.ams.org/view?ProductCode=TRANS2/182>.
46. *Dyachenko, A. I.* Decay of the monochromatic capillary wave [Текст] / A. I. Dyachenko, A. O. Korotkevich, V. E. Zakharov // Письма в ЖЭТФ. — 2003. — Т. 77, № 9. — С. 572—576. — URL: http://jetpletters.ru/ps/0/article_412.shtml.
47. *Короткевич, А. О.* Численное моделирование слабой турбулентности поверхностных волн [Текст] : дис. ... канд. / Короткевич Александр О. — Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, Москва-Черноголовка, Россия, 2003.
48. Optical turbulence: weak turbulence, condensates and collapsing fragments in the nonlinear Schroedinger equation [Текст] / A. I. Dyachenko [и др.] // Physica D. — 1992. — Т. 57. — С. 96—160. — URL: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(92\)90090-A](https://doi.org/10.1016/0167-2789(92)90090-A).
49. *Захаров, В. Е.* Слабая турбулентность в средах с распадным спектром [Текст] / В. Е. Захаров // Прикладная механика и техническая физика. — 1965. — Т. 6, № 4. — С. 35—39. — URL: <http://mi.mathnet.ru/pmtf8770>.
50. *Захаров, В. Е.* Некоторые вопросы нелинейной теории поверхностных волн [Текст] : дис. ... канд. / Захаров Владимир Е. — Институт ядерной физики, Новосибирск, СССР, 1966. — URL: https://zakharov.itp.ac.ru/pub/data/Zakharov_PhD_thesis.pdf.
51. *Zakharov, V. E.* Energy Spectrum for Stochastic Oscillations of the Surface of a Liquid [Текст] / V. E. Zakharov, N. N. Filonenko // J. Appl. Mech. Tech. Phys. — 1967. — Т. 4. — С. 506.
52. *Dyachenko, A. I.* Weak turbulence of gravity waves [Текст] / A. I. Dyachenko, A. O. Korotkevich, V. E. Zakharov // JETP Lett. — 2003. — Т. 77, № 10. — С. 546—550. — URL: <https://doi.org/10.1134/1.1595693>.

53. One-dimensional optical wave turbulence: Experiment and theory [Текст] / J. Laurie [и др.] // *Physics Reports*. — 2012. — Т. 514, № 4. — С. 121—175. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157312000130>; One-Dimensional Optical Wave Turbulence: Experiment and Theory.
54. *Nazarenko, S. Wave Turbulence on Water Surface* [Текст] / S. Nazarenko, S. Lukaschuk // *Annual Review of Condensed Matter Physics*. — 2016. — Т. 7, № 1. — С. 61—88. — URL: <https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-071715-102737>.

Короткевич Александр Олегович

Моделирование нелинейных волн в задачах теоретической физики

Автореф. дис. на соискание ученой степени д-р физ.-мат. наук

Подписано в печать ____ . ____ . ____ . Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография _____