

На правах рукописи

**Артемьев Александр Андреевич**

**Корреляционные функции в теории струн и квантовой  
гравитации Лиувилля**

Специальность 1.3.3 —  
«Теоретическая физика»

Автореферат  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Москва — 2026

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук.

Научный руководитель: **Белавин Александр Абрамович**, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, профессор, ФГБУН Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук, главный научный сотрудник.

Официальные оппоненты:

**Кривонос Сергей Олегович**, доктор физико-математических наук, Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна, Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, Отдел современной математической физики, начальник отдела

**Алкалаев Константин Борисович**, доктор физико-математических наук, ФГБУН Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук, г. Москва, Отделение теоретической физики им. И.Е. Тамма, Лаборатория квантовой теории поля, ведущий научный сотрудник

Ведущая организация: ФГБУН Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук

Защита состоится \_\_\_\_\_ в \_\_\_\_ на заседании диссертационного совета 24.1.128.01 при ФГБУН Институте теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук по адресу: Московская область, г. Черноголовка, просп. Академика Семенова, д. 1А.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБУН Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук или на сайте диссертационного совета <https://www.itp.ac.ru/ru/dissertation-council/>.

Автореферат разослан «\_\_» \_\_\_\_\_ 2026 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета

24.1.128.01,

д-р физ.-мат. наук

Адлер Всеволод Эдуардович

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Важным вопросом современной теоретической физики является задача о построении теории, самосогласованно включающей в себя все известные фундаментальные взаимодействия и справедливой на любых энергетических и пространственных масштабах. Три из четырёх фундаментальных взаимодействий (электромагнитное, слабое и сильное) описываются на языке релятивистской квантовой теории поля в рамках Стандартной модели физики элементарных частиц. Гравитационные взаимодействия не включены в Стандартную модель и, когда квантовые эффекты пренебрежимо малы, хорошо описываются общей теорией относительности Эйнштейна. Рассмотрение эйнштейновской гравитации как квантовой теории поля проблематично, так как, помимо технических сложностей из-за её существенной нелинейности, в четырёх измерениях теории Эйнштейна отсутствует перенормируемость. Таким образом, она может выступать только в качестве эффективной теории.

В моделях с меньшей размерностью пространства-времени проблема неперенормируемости исчезает. Низкоразмерные модели не отражают полностью свойства четырёхмерной гравитации: так, например, в размерности два уравнения Эйнштейна в пустом пространстве выполняются тождественно. Однако, в присутствии граничных условий или материи, взаимодействующей с гравитацией, задача о вычислении корреляционных функций становится нетривиальной и такие двумерные теории могут служить интересными «игрушечными моделями».

В двумерном случае имеется также дискретный подход к описанию квантовой гравитации — подход матричных моделей. В нём рассматривается задача усреднения по статистическому ансамблю случайных матриц большого размера с некоторым весом. Вычисление корреляционных функций в таких моделях по теории возмущений может быть организовано

как суммирование по «ленточным графам», о которых можно думать как о дискретизованных (скажем, триангулированных) случайных двумерных поверхностях. В некоторых точках пространства параметров среднее число граней дискретизованной поверхности расходится и эффективно наибольший вклад в сумму дают «почти непрерывные» поверхности. Взятие так называемого «двойного скейлингового предела» в окрестности таких критических точек приводит к универсальному поведению корреляторов, фактически независимому от конкретного выбора веса, с которым производится усреднение в матричном ансамбле. Ожидается, что это критическое поведение описывается непрерывными теориями двумерной квантовой гравитации.

В последнее время теории двумерной гравитации, предположительно дуальные матричным моделям, активно изучаются; примерами являются гравитация Джайкива-Тейтельбойма (JT) [1], «Вирасоро-минимальная струна» (VMC) [2] и «комплексная струна Лиувилля» [3]. Аргументы в пользу дуальности в разных примерах имеют разную природу; так, в JT-гравитации функциональный интеграл вычисляет объемы пространств модулей гиперболических поверхностей, подчиняющиеся характерным для матричных моделей рекуррентным соотношениям, в то время как для VMC соответствие возникает благодаря связи с геометрией определенных расслоений на пространствах модулей кривых. Наличие дуального описания позволяет эффективно исследовать эти теории, что привело к большому набору интересных результатов: от приложений к гораздо менее изученной трехмерной квантовой гравитации [4] до описания квантовых эффектов в околоэкстремальных черных дырах уже в четырёх измерениях [5]. Эти результаты мотивируют исследовать более тщательно другие известные модели двумерной гравитации и попытаться найти единую парадигму для всех таких примеров.

**Современное состояние исследований.** Изучение двумерной квантовой гравитации имеет долгую историю. В работе Полякова [6] было получено, что задачу о взаимодействии с двумерной гравитацией конформной теории поля с центральным зарядом  $c_M \neq 26$  в конформной калибровке можно свести к теории одного скалярного поля с экспоненциальным членом взаимодействия (ныне известной как теория Лиувилля) и некоторой нелинейной мерой интегрирования в функциональном интеграле. Позже Давид, Дистлер и Каваи [7; 8] выдвинули гипотезу о том, что переход от нелинейной меры к обычной для теории скалярного поля сводится к перенормировке параметров лиувилевского действия. Теория Лиувилля со стандартной функциональной мерой является конформной КТП; таким образом, после перенормировки теория двумерной гравитации, взаимодействующей с конформной материей, описывается прямым произведением трех конформных теорий поля (теории Лиувилля, СФТ материи и БРСТ-духов, появляющихся при фиксации калибровки), которые взаимодействуют только за счет условия сокращения конформной аномалии:  $c_{total} = c_L + c_M - 26 = 0$ . Двумерные теории гравитации такого вида могут быть также проинтерпретированы как теории на мировом листе некритических струн; такой взгляд на них подсказывает, какие наблюдаемые представляют интерес для вычисления. Случай, когда материя представляет собой минимальную модель конформной теории поля, известен как «минимальная струна» (МС); в более ранних работах её также называют «минимальная лиувиллевская гравитация». Книжник, Поляков и Замолотчиков [9] обнаружили, что в другой калибровке светового конуса корреляторы в таких теориях гравитации имеют симметрию алгебры токов. Это позволило им определить спектр аномальных размерностей в таких теориях; сейчас этот результат известен как «КПЗ-скейлинг».

Подход матричных моделей впервые был применен к двумерной гравитации в [10], а поведение корреляционных функций в окрестностях крити-

ческих точек исследовано в [11; 12]. Важным результатом является идентификация некоторых из классов универсальности, реализуемых в двухматричных моделях, с непрерывными теориями двумерной гравитации, взаимодействующей с  $(p, q)$ -минимальными моделями конформной теории поля [13; 14], т.е. с минимальной струной. Это отождествление было предложено на основе анализа скейлинговых свойств корреляторов и статистической суммы, которые, как оказывается, согласуются с КПЗ-скейлингом [9].

Ещё один достойный упоминания подход — это «топологическая гравитация» Виттена [15]. Он показал, что после так называемого топологического твиста амплитуды в двумерной гравитации могут быть выражены в терминах чисел пересечения тавтологических классов когомологий на пространствах модулей стабильных кривых. Ожидалось, что эти числа пересечений могут быть вычислены и в матрично-модельном подходе; это утверждение было сформулировано Виттеном как гипотеза и позже доказано Концевичем, используя связь между двумя формулировками и интегрируемой иерархией Кортевега - де Фриза [16].

Для теоретико-полевого и матрично-модельного подхода к минимальной теории струн, однако, сформулировать точное соответствие между наблюдаемыми оказалось более сложно. Во-первых, было быстро понято, что возможность «резонансов» между операторами (или, что эквивалентно, возможность добавить локальные контрчлены к действию на мировом листе) приводит к тому, что отождествление операторов только на основании КПЗ-скейлинга становится невозможным: в общем случае константы связи в производящих функционалах в двух подходах выражаются друг через друга нелинейно. В частности, введение экспоненциального взаимодействия в теорию Лиувилля уже приводит к определенной деформации относительно критической точки в матричной модели, такой, что в этом подходе несколько констант связи становятся ненулевыми (так называемый «конформный бэкграунд»). Исследование нелинейной связи между

константами связи в двух подходах («резонансных преобразований») было начато в [17], где частичный прогресс в этом направлении позволил сопоставить двухточечные амплитуды на поверхностях рода ноль; выражения, полностью описывающие «конформный бэкграунд», впервые были получены в [18]. Наиболее хорошо понят случай, когда  $(p, q) = (2, 2m + 1)$ , то есть в качестве материи выступает серия Ли-Янга минимальных моделей. В этом случае для получения соответствующего критического поведения достаточно рассматривать одноматричную модель [19; 20], что несколько упрощает вычисления в дискретном подходе. В частности, для серии Ли-Янга резонансные преобразования описаны полностью в [21].

Во-вторых, вычисления корреляторов из первых принципов в подходе мирового листа гораздо сложнее, чем в дуальном подходе. Необходимым условием для этого было найти точное решение теории поля Лиувилля (а именно, ее структурные константы), что было сделано независимо в [22] и [23] (формула DOZZ). Это сразу приводит к вычислению трехточечной амплитуды в минимальной струне на поверхностях рода ноль [24]. После этого в теории Лиувилля были открыты операторные уравнения, названные «высшими уравнениями движения» [25], которые в применении к минимальной струне позволили провести первое аналитическое вычисление амплитуды, включающей интегрирование по пространству модулей кривых (а именно, четырехточечной амплитуды на сфере [26]). Для серии Ли-Янга ответ был сопоставлен с матрично-модельными результатами в [21]. Для более общего случая  $(p, q)$ -минимальной струны, несмотря на некоторые продвижения [27; 28], точное соответствие между корреляторами все еще не так хорошо понято.

**Цель и задачи работы.** Главной целью настоящей диссертационной работы является вычисление корреляционных чисел в  $(2, 2p+1)$ -минимальной теории струн в непрерывном и матрично-модельном подходе и проверка

гипотезы дуальности.

Для достижения цели ставятся следующие **задачи**:

- 1) развить вычислительные и аналитические методы, в частности, метод высших уравнений движения, в подходе мирового листа (теоретико-полевым);
- 2) исследовать свойства матрично-модельных ответов в пределе  $p \rightarrow \infty$ , отвечающем «квазиклассическому» пределу в теории поля Лиувилля, и дать им интерпретацию в терминах классической теории Лиувилля и гиперболической геометрии;
- 3) развить «словарь» дуальности, уточнив соответствие между корреляторами в обоих подходах.

### **Основные положения, выносимые на защиту.**

- 1) Модификация метода высших уравнений движения для вычисления одноточечного коррелятора на торе в  $(2, 2p + 1)$  минимальной струне. Подтверждение дуальности с матричной моделью при помощи аналитических выражений для амплитуд, полученных данным методом.
- 2) В пределе  $p \rightarrow \infty$  корреляторы в матрично-модельном подходе сводятся к объемам пространств модулей поверхностей постоянной кривизны с коническими дефектами, определяемым с помощью классической теории Лиувилля.
- 3) Выражения для струнных амплитуд в терминах данных топологической рекурсии, полученные в результате переформулировки дуальности с матричной моделью.
- 4) Общая формула для амплитуд в терминах сумм по стабильным графам и чисел пересечений тавтологических классов когомологий на

пространстве модулей стабильных кривых, полученная при помощи новой формулировки дуальности.

**Практическая значимость.** Изучаемые в диссертации проблемы представляют научный интерес в области теоретической и математической физики. Развитые в работе методы могут быть применены в других моделях двумерной квантовой гравитации. Так, метод высших уравнений движения на торе был позже адаптирован другими авторами для вычисления одноточечной амплитуды в модели комплексной струны Лиувилля [29]. Рассматриваемые здесь объемы пространств модулей поверхностей с коническими дефектами, по-видимому, дают универсальный предел амплитуд во всех теориях типа «лиувиллевской гравитации», когда центральный заряд материи стремится к  $(-\infty)$ . В частности, это описывает класс корреляторов в теории гравитации Джакива-Тейтельбойма и её деформациях [30]. Наконец, исследуемые корреляторы являются простыми примерами пертурбативных амплитуд в теории струн. Точные формулы из дуального подхода, выведенные здесь, позволяют вычислять эти амплитуды в любом порядке топологического разложения, что может быть применено для исследования непертурбативных эффектов с помощью техники resurgence (см., например, [31]).

**Научная новизна, достоверность и личный вклад.** В работе [I] впервые продемонстрировано аналитическое соответствие между матрично-модельным и теоретико-полевым подходами к минимальной гравитации для случая петлевых поправок к струнным амплитудам (т.е. амплитуд на поверхностях рода один). В работе [II] было предложено одно из возможных геометрических определений форм объема, возникающей на пространствах модулей поверхностей с коническими дефектами. Такие формы объема не рассматривались в полной общности в математической и физиче-

ской литературе ранее. В работах [III, IV] впервые получены явные общие ответы для амплитуд в минимальной струне в матрично-модельном подходе, а также продемонстрирована связь с другими теориями некритических струн, возникшими в последние годы.

Результаты диссертации являются оригинальными и новыми и впервые получены автором в соавторстве с коллегами. В совместной работе [I] личный вклад автора состоял в разработке метода вычисления и получении аналитических результатов в конкретных рассмотренных в диссертации примерах. В совместной работе [III] личный вклад автора состоял в постановке задачи, проведении вычислений, демонстрирующих связь амплитуд и « $p$ -деформированных объемов», а также технических вычислений, необходимых для выведения формулы через теорию пересечений. Достоверность подтверждается согласием с результатами работ других авторов.

**Апробация работы.** Результаты, изложенные в данной работе, были представлены соискателем на ряде семинаров и международных конференций, как то: семинар лаборатории физики высоких энергий, МФТИ; онлайн-семинар «Непертурбативные методы квантовой теории поля», МФТИ; семинар сектора квантовой теории поля ФИАН; семинар Центра перспективных исследований им. Кричевера, Сколтех; конференция Landau Week (г. Ереван, 2023); конференция «Non-perturbative methods in QFT», (г. Фукуока, 2025); конференция «Advances in Quantum Field Theory» (г. Дубна, 2025); конференция «Integrable Systems and Quantum Theory» (г. Санкт-Петербург, 2025). Также результаты докладывались на научных семинарах учёного совета ИТФ им. Л.Д. Ландау РАН.

**Публикации по теме диссертации.** Результаты диссертации основаны на работах:

- I *Artemev A., Belavin V.* Torus one-point correlation numbers in minimal Liouville gravity // JHEP. — 2023. — Т. 02. — С. 116. — DOI: [10.1007/JHEP02\(2023\)116](https://doi.org/10.1007/JHEP02(2023)116)
- II *Artemev A.*  $p \rightarrow \infty$  limit of tachyon correlators in  $(2, 2p + 1)$  minimal Liouville gravity from classical Liouville theory // JHEP. — 2023. — Т. 12. — С. 155. — DOI: [10.1007/JHEP12\(2023\)155](https://doi.org/10.1007/JHEP12(2023)155)
- III *Artemev A., Chaban I.*  $(2, 2p + 1)$  minimal string and intersection theory I // JHEP. — 2025. — Т. 01. — С. 151. — DOI: [10.1007/JHEP01\(2025\)151](https://doi.org/10.1007/JHEP01(2025)151)
- IV *Artemev A.*  $x - y$  swap for a  $(2, 2p + 1)$  minimal string // Phys. Rev. D. — 2025. — Т. 112, № 4. — С. 046019. — DOI: [10.1103/physrevd.112.046019](https://doi.org/10.1103/physrevd.112.046019)

Результаты работы изложены в 4 печатных изданиях, 4 из которых изданы в журналах, рекомендуемых ВАК.

**Структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав основного текста (главы 1 – 4) и заключения (глава 5). Объем диссертации составляет 135 страниц, включая 9 рисунков и 1 таблицу. Список литературы содержит 83 наименования.

## Содержание диссертации.

**Глава 1** имеет вводный характер. В ней даются необходимые для основной части работы сведения из конформно-теоретико-полевого и матрично-модельного подходов к минимальной теории струн.

В **разделе 1.1** обсуждается подход мирового листа. В **подразделе 1.1.1** вводятся обозначения и приводятся основные сведения о конформной теории поля Лиувилля и минимальных моделях двумерной СФТ. Теория

поля Лиувилля описывается действием скалярного поля  $\phi$  с экспоненциальным взаимодействием вида  $e^{2b\phi}$  и имеет центральный заряд  $c = 1 + 6Q^2$ ,  $Q = b + b^{-1}$ . Непрерывный спектр теории образуют примарные поля  $V_a =: e^{2a\phi}$ . Минимальные модели СФТ — двумерные конформные теории поля с конечным числом конформных семейств в спектре, возникающие для специальных значений центрального заряда  $c_M = 1 - 6 \left( \sqrt{\frac{r'}{r}} - \sqrt{\frac{r}{r'}} \right)^2$ ,  $r < r'$  — взаимно простые. Спектр состоит из подмножества вырожденных полей вида  $\Phi_{m,n}$  для  $0 < m < r$ ,  $0 < n < r'$ . Структурные константы в обеих теориях известны точно [22–24].

В подразделе 1.1.2 определяются амплитуды в минимальной теории струн. Конформная теория поля на мировом листе минимальной струны даётся прямым произведением трёх секторов: минимальной модели СФТ  $M_{r,r'}$  в качестве «материи», теории поля Лиувилля и духовой  $BC$ -системы, с суммарным центральным зарядом 0. В теории имеется нильпотентный БРСТ-заряд  $\mathcal{Q}$ . Амплитуды даются интегралами по пространству модулей кривых рода  $g$  с  $n$  отмеченными точками от старших форм, построенных из корреляторов локальных операторов, представляющих классы когомологий  $\mathcal{Q}$ . «Тахионные» операторы с духовым числом 2 строятся из произведения примарных полей в теории Лиувилля и минимальной модели с суммарной конформной размерностью 1:  $\mathcal{T}_{m,n} = C\bar{C}V_{m,-n}\Phi_{m,n}$ .

В подразделе 1.1.3 обсуждается другой класс БРСТ-замкнутых операторов  $O_{m,n}$  с духовым числом 0 из т.н. «кольца дискретных состояний» и свойства таких операторов. Затем даётся краткий обзор высших уравнений движения (ВУД) в теории Лиувилля. Это операторные уравнения, выражающие специальные потомки «логарифмических операторов» вида  $V'_{m,n} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} V_a |_{a=a_{m,n}}$  через примарные операторы  $V_{m,-n}$ . В минимальной теории струн эти соотношения приводят к уравнениям, связывающим «тахионы» и логарифмические аналоги операторов из «кольца дискретных

состояний». Один из способов записи этих уравнений

$$\mathcal{T}_{m,n} \equiv C\bar{C}V_{m,-n}\Phi_{m,n} = B_{m,n}^{-1}Q\bar{Q}(O'_{m,n}) . \quad (1)$$

В разделе 1.2 сформулирован «дуальный» подход к вычислению корреляционных чисел. Вычисление описано в терминах процедуры топологической рекурсии [32], вычисляющей набор  $n$ -дифференциалов  $\omega_{g,n} = W_{g,n}(\vec{z})dz_1 \dots dz_n$  со специальными свойствами по исходным данным «спектральной кривой» — параметрически заданной кривой в  $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ . Со спектральной кривой связана тау-функция иерархии Кадомцева - Петвиавшвили, производные от которой по КП-временам  $t_k$  выражаются как коэффициенты разложения  $n$ -дифференциалов по специальному базису. В свою очередь, тахионные корреляторы отождествляются с производными по другим переменным  $\tau_k$ , связанными с  $t$  так называемыми «резонансными преобразованиями» [21]. В конце раздела приведены примеры выражений для корреляционных чисел для малых  $g$  и  $n$ , полученные в предыдущих работах [21; 33; 34].

**Глава 2** посвящена вычислению одноточечной амплитуды в  $(2, 2p + 1)$  минимальной теории струн на торе в подходе мирового листа. Глава содержит результаты работы [1].

В разделе 2.1 перечислены важные для дальнейшего свойства корреляторов в двумерной конформной теории поля на торе с модулярным параметром  $\tau$ : конформные тождества Уорда, модулярная ковариантность одноточечных функций примарных полей и представление для корреляционных функций на торе в виде следа по пространству состояний со вставкой оператора  $q^{L_0}\bar{q}^{\bar{L}_0}$ , где  $q = e^{2\pi i\tau}$ . Приводятся также явные выражения для корреляционных функций в духовом секторе; ненулевое коррелятора требует насыщения духовых нулевых мод.

В разделе 2.2 обсуждается применение метода высших уравнений движения к вычислению одноточечных тахионных амплитуд в минимальной

струне. Они имеют общий вид

$$A_1^1(n) := \int_F d^2\tau \langle B\bar{B}T_{1,n} \rangle_\tau = \int_F d^2\tau \langle B\bar{B}C\bar{C}V_{1,-n}\Phi_{1,n} \rangle_\tau, \quad (2)$$

где  $F$  — пространство модулей кривых рода 1 с одной отмеченной точкой, или фундаментальная область действия  $PSL(2, \mathbb{Z})$  на верхней полуплоскости. Возможный выбор  $F = \{|\operatorname{Re} \tau| \leq \frac{1}{2}, \operatorname{Im} \tau > 0, |\tau| > 1\}$ .

В подразделе **2.2.1** рассматривается простейший пример  $\mathcal{T}_{1,2}$ . Вычисление заключается в применении высших уравнений движения (1) к тахионному оператору  $C\bar{C}V_{1,-n}\Phi_{1,n}$ . Использование явного вида оператора  $O_{1,2}$ , а также коммутационных соотношений  $\{Q, B(z)\} = T(z)$ , где  $T$  — полный тензор энергии импульса, с точностью до  $\mathcal{Q}$ -точных членов сводит амплитуду к виду

$$A_1^1(2) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \int d^2\tau \langle T(z)\bar{T}(\bar{z}) b^4 BC\bar{B}C\bar{V}_a \Phi_{1,2} \rangle |_{a=a_{1,2}}.$$

Опущенные члены равны нулю, так как в них не насыщаются нулевые моды в духовом секторе. Применение тождеств Уорда к коррелятору под интегралом выделяет члены, являющиеся полной производной по модулярному параметру вида  $(2\pi)^2 \frac{\partial^2}{\partial\tau\partial\bar{\tau}} \langle BC\bar{B}C\bar{V}'_{1,2}\Phi_{1,2} \rangle_\tau$ . Другие вклады обнуляются, так как одноточечная функция оператора из кольца дискретных состояний  $\langle O_{1,2} \rangle_\tau$  не зависит от  $\tau$ . Это является следствием его БРСТ-замкнутости. Интеграл от полной производной сводится к интегралу по границе пространства модулей с помощью теоремы Стокса. Он состоит из двух вкладов:

$$\frac{1}{4}(2\pi)^2 \int_{-1/2}^{1/2} d\tau_1 \frac{\partial}{\partial\tau_2} \langle O' \rangle_{\tau_2 \rightarrow \infty} + \frac{1}{24}(2\pi)^3 \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \Delta_a^L \cdot \langle O \rangle_\tau. \quad (3)$$

где  $\tau_2 = \operatorname{Im} \tau$ . Второй вклад связан с неоднородным законом преобразования логарифмических полей под действием  $\tau \rightarrow -1/\tau$ .

Последний шаг состоит в вычислении средних  $\langle O_{1,2} \rangle_\tau$  и  $\langle O'_{1,2} \rangle_\tau$ . В пределе  $\tau_2 = \text{Im } \tau \rightarrow +\infty$  только конечное число слагаемых в представлении коррелятора как ряда по  $q, \bar{q}$  дают ненулевой вклад; их можно вычислить явно. В некоторой нормировке итоговый ответ принимает вид  $A_1^1(2) = (2p + 1 - 2) \cdot 2$ .

В **подразделе 2.2.2** вычисление обобщается на следующий по сложности пример оператора  $\mathcal{T}_{1,4}$ . Усложнение состоит в том, что после применения высших уравнений движения необходимо рассматривать корреляторы потомков, к которым нельзя сразу же применить конформные тождества Уорда. Явные вычисления показывают, что утверждение о независимости  $\langle O_{1,4} \rangle_\tau$  от  $\tau$  остается в силе и процедура сведения интеграла к граничным вкладкам приводит к тому же ответу (3). Вычисление средних  $\langle O_{1,2} \rangle_\tau$  и  $\langle O'_{1,2} \rangle_\tau$ ,  $\tau_2 \rightarrow +\infty$  проводится аналогично. Итоговый ответ принимает вид  $A_1^1(4) = (2p + 1 - 4) \cdot 4$ .

В **разделе 2.3** обсуждаются и распространяются на общий случай вычисления предыдущего раздела. В **подразделе 2.3.1** предлагается обобщение формулы для тахионной амплитуды на случай  $A_1^1(2k) = (2p + 1 - 2k) \cdot 2k$ , что совпадает с ответом из матрично-модельного подхода, полученным в [34]. В **подразделе 2.3.2** обращено внимание на тонкости в применении этого метода для случая тахионов  $\mathcal{T}_{1,k}$  с нечётным  $k$ . В **подразделе 2.3.3** показывается, что процедура вычисления не меняется при выборе другой фундаментальной области действия  $SL(2, \mathbb{Z})$  на верхней полуплоскости  $\tau$ . Наконец, в **подразделе 2.3.4** обсуждаются возможные модификации этого метода для других теорий двумерной квантовой гравитации.

В **главе 3** исследуется геометрическая интерпретация струнных амплитуд в квазиклассическом пределе  $p \rightarrow \infty$ . Выдвинута гипотеза, что в этом пределе струнные амплитуды сводятся к объемам, ассоциированным с кэлеровыми метриками на пространстве модулей, введенными Зографом и Тахтаджяном. Для этих метрик классическое лиувиллевское действие

является кэлеровым потенциалом. Глава содержит результаты работы [III].

В разделе 3.1 приведены общие сведения о квазиклассическом пределе в теории Лиувилля, а также обсуждаются некоторые свойства амплитуд в минимальной теории струн.

В подразделе 3.1.1 обсуждается вычисление корреляционных функций в теории Лиувилля в пределе бесконечного центрального заряда ( $b \rightarrow 0$ ). Они определяются как экспонента от Лиувилевского действия  $S_{cl}$ , вычисленная на решении классического уравнения Лиувилля с дельта-функциональным источником в точках вставки «тяжелых» операторов  $V_a$  с  $a = \eta b^{-1}$ , где  $\eta$  конечно в пределе  $b \rightarrow 0$ . Это решение описывает метрику постоянной кривизны на поверхности с коническими дефектами дефицита угла  $4\pi\eta_i$ . Классическое действие можно вычислять с помощью вспомогательного уравнения второго порядка, возникающего как классический предел уравнения Белавина-Полякова-Замолодчикова (БПЗ). Для четырёх тяжелых операторов оно выглядит как

$$[\partial^2 + t(z)]\psi(z) = 0,$$

$$t(z) = \frac{\delta_1}{(z-x)^2} + \frac{\delta_2}{z^2} + \frac{\delta_3}{(z-1)^2} + \frac{x(x-1)c}{z(z-1)(z-x)} + \frac{\delta_4 - \delta_3 - \delta_2 - \delta_1}{z(z-1)}. \quad (4)$$

Здесь  $\delta_i = \eta_i(1 - \eta_i)$ . В этом уравнении присутствует «аксессуарный параметр»  $c(x, \bar{x})$ , определяемый из условия, что система решений имеет унитарную монодромию. Классическое действие тогда вычисляется из «гипотезы Полякова»:  $c = -\frac{\partial S_{cl}}{\partial x}$ .

В подразделе 3.1.2 обсуждаются некоторые свойства корреляционных чисел на сфере в  $(2, 2p+1)$  минимальной струне. Во-первых, при условии  $k_i + k_j > p \forall i, j$  это симметрические полиномы от  $(p + 1/2 - k_i)^2$ . Во-вторых, предположим, что сумма любых  $n-2$  из  $n$  параметров коррелятора  $k_i$  меньше, чем  $p$ . Тогда выражение для корреляционных чисел факторизуется и с точностью до множителя, зависящего только от  $\sum_{i=1}^n k_i$ ,

вычисляет размерность пространства конформных блоков в минимальной модели.

В разделе 3.2 описывается численный метод, позволяющий вычислять классическое действие, метрику Зографа-Тахтаджяна и соответствующие объемы пространств модулей с помощью конформного бутстрапа.

В подразделе 3.2.1 описана схема вычислений. Имеется общее представление для корреляционной функции в теории Лиувилля как интеграл по промежуточной размерности, включающий произведение DOZZ-структурных констант и конформных блоков Вирасоро. Оба этих ингредиента экспоненцируются в классическом пределе  $b \rightarrow 0$  так, что коррелятор принимает вид  $\int \frac{dp}{4\pi} \exp\left(-\frac{1}{b^2} S^{(4)}(p, x, \bar{x})\right)$ . Метод перевала утверждает, что в таком пределе интеграл равен  $\exp\left(-\frac{1}{b^2} S^{(4)}(p_{\text{saddle}}(x, \bar{x}), x, \bar{x})\right)$ , где  $p_{\text{saddle}}$  определяется условием экстремума  $S^{(4)}(p, x, \bar{x})$ :  $\frac{\partial S^{(4)}}{\partial p} \Big|_{p=p_{\text{saddle}}} = 0$ .

Для  $p_{\text{saddle}}$  имеется асимптотическое разложение на границе пространства модулей, когда  $x \rightarrow 0$ . Введя эллиптическую параметризацию  $q(x) = \exp\left(-\pi \frac{K(1-x)}{K(x)}\right)$ ,  $p_{\text{saddle}}$  представляется как ряд по  $\epsilon = (\log \frac{\alpha(\eta_i)}{q\bar{q}})^{-1}$ , коэффициенты которого определяются разложением  $S^{(4)}(p, x, \bar{x})$  при малых  $p$ . Вычисляя  $S^{(4)}(p_{\text{saddle}}(x, \bar{x}), x, \bar{x})$ , мы находим аналогичный ряд для классического действия и метрики на пространстве модулей  $g_{q\bar{q}} = \partial_q \partial_{\bar{q}} S^{(4)}(q, \bar{q})$ . Остается провести численно интегрирование  $\sqrt{\det g}$  по пространству модулей  $\mathcal{M}_{0,4}$ .

В подразделе 3.2.2 обсуждается применение этого метода к интересующему нас случаю, соответствующему четырехточечному коррелятору в теории Лиувилля вида  $\langle V_{\frac{\kappa}{2b}}(0) V_{\frac{\kappa}{2b}}(x) V_{\frac{1}{2b}}(1) V_{\frac{1}{2b}}(\infty) \rangle$ . Пространство модулей  $\mathcal{M}_{0,4}$  разбивается на фундаментальную область  $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F} = \{q = r e^{i\psi} \mid -\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2, 0 \leq r \leq \exp(-\sqrt{\pi^2 - \psi^2})\} \quad (5)$$

и 5 её образов под действием группы  $S_3$  проективных преобразований, переставляющей 0, 1,  $\infty$ . Для вычисления интеграла по пространству модулей

каждую из областей можно отобразить в  $\mathcal{F}$  и проводить в ней разложение по конформным блокам. В двух случаях  $V_{\kappa/2b}$  будет сливаться с  $V_{\kappa/2b}$ , а в остальных четырех — с  $V_{1/2b}$  («канал 1» и «канал 2» соответственно). Показано, что действительная седловая точка в интеграле по  $p$  во всех каналах существует только при  $\kappa > 1/2$ .

В подразделе **3.2.3** приведены результаты вычисления. Для рассматриваемых примеров получен асимптотический ряд для  $p_{\text{saddle}}$  и метрики в обоих каналах; например, при наиболее простом выборе параметра разложения  $\frac{1}{\epsilon} = \log \frac{1}{x\bar{x}} - h(\kappa - \frac{1}{2})$ , где  $h(s) = \psi^{(0)}(1-s) + \psi^{(0)}(s) + 8\gamma_E + 6\psi^{(0)}(\frac{1}{2})$  в канале 1 ряд для метрики имеет вид

$$\frac{8\pi^3 \epsilon^3}{q\bar{q}} \left( 1 - 10\pi^2 \left( \frac{\psi^{(2)}(1-\delta) + 6\psi^{(2)}(\frac{1}{2}) + \psi^{(2)}(\delta)}{12} + \frac{8\zeta(3) - 4\psi^{(2)}(1)}{3} \right) \epsilon^3 + \dots \right), \quad (6)$$

где  $\psi^{(n)}$  — полигамма-функция. Результаты интегрирования метрической формы объема согласуются с предельным выражением для соответствующей амплитуды в минимальной струне при  $p \rightarrow \infty$  с хорошей точностью.

В разделе **3.3** описан способ вычисления метрики Зографа-Тахтаджяна, основанный на теории возмущений в методе монодромии.

В подразделе **3.3.1** обсуждается с геометрической точки зрения свойство о пропорциональности амплитуд числу конформных блоков. Для случая, когда  $n-3$  из  $n$  параметров  $\kappa_i \equiv \frac{k_i}{p}$  стремятся к нулю, в квазиклассическом пределе это сводится к

$$A_n^0(k_1, \dots, k_n) \approx p^{2n-6} \kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_{n-3} (2 - \sum_{i=n-2}^n \kappa_i)^{n-3}, \quad p \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Это свойство можно обосновать для метрики ЗТ в пределе «легких» полей, когда размерности полей  $\Delta_i = O(1)$ ,  $b \rightarrow 0$  для  $i = 1 \dots n-3$  и только 3 тяжелых поля  $\kappa_{n-2}$ ,  $\kappa_{n-1}$ ,  $\kappa_n$  дают вклад в классическое уравнение Лиувилля. Тогда асимптотика классического действия выражается через значения классического поля Лиувилля в  $n-3$  отмеченных точках:

$S^{cl} = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{n-3} a_i \varphi_{cl}(x_i)$ . Формула (7) для  $A_n^0(k_1, \dots, k_n)$  в таком пределе является следствием уравнения Лиувилля.

В подразделе 3.3.2 объясняется, как применить теорию возмущений в методе монодромии. Если одна или несколько из внешних размерностей малы по сравнению с остальными («пертурбативно-тяжелые»), представим  $t(z)$  как  $t^{(0)}(z) + t^{(1)}(z)$ , где  $t^{(1)}$  содержит вклады, пропорциональные пертурбативно-тяжелым размерностям или аксессуарным параметрам, и будем искать решение классического уравнения БПЗ в виде ряда  $\psi = \psi^{(0)} + \psi^{(1)} + \dots$ . Приравнявая слагаемые в каждом порядке малости, получаем набор дифференциальных уравнений. Если решения в нулевом порядке  $\psi_{\pm}^{(0)}$  предполагаются известными (для случая 2 и 3 тяжелых операторов они известны явно), то поправки  $\psi^{(i)}$  могут быть найдены последовательно. Так может быть найдена матрица монодромии системы решений  $M_{\gamma}$  по теории возмущений; например, в первом порядке можно получить

$$M_{\gamma}^{(1)} = (1_{2 \times 2} + I)M_{\gamma}^{(0)}, \quad I = \frac{1}{W} \begin{pmatrix} \oint_{\gamma} \psi_{-}^{(0)} t^{(1)} \psi_{+}^{(0)} & - \oint_{\gamma} \psi_{+}^{(0)} t^{(1)} \psi_{+}^{(0)} \\ \oint_{\gamma} \psi_{-}^{(0)} t^{(1)} \psi_{-}^{(0)} & - \oint_{\gamma} \psi_{+}^{(0)} t^{(1)} \psi_{-}^{(0)} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где  $M_{\gamma}^{(0)}$  — матрица в нулевом порядке, а  $W$  — вронсиан решений  $\psi_{\pm}^{(0)}$ .

В подразделе 3.3.3 рассматривается простейший пример, когда имеется два пертурбативно-тяжелых (в точках 0 и  $x$ ) и два тяжелых поля (в точках 1 и  $\infty$ ). Параметры тяжелых полей должны быть равны  $\eta_3 = \eta_4 = \eta_h$  для того, чтобы существовало решение уравнения в нулевом порядке. Параметры пертурбативно-тяжелых операторов  $\eta_1 = \eta_l$ ,  $\eta_2 = \eta_l \cdot \sigma$ . Условие унитарности матрицы монодромии, вычисленной в первом порядке теории возмущений, приводит к ответу для аксессуарного параметра

$$c = \frac{\eta_l}{1-x} \left( \alpha \frac{\left( \sqrt{\sigma^2(\zeta+1)^2 - 2\sigma((\zeta-6)\zeta+1) + (\zeta+1)^2} - (\sigma+1)(\zeta+1) \right)}{2(\zeta-1)} - \sigma \right), \quad (9)$$

где  $\alpha = 1 - 2\eta_h$ ,  $\zeta \equiv |1 - x|^{2\alpha}$ . Отсюда можно вычислить метрику Зографа-Тахтаджяна и соответствующий объем пространства модулей

$$V \sim \eta_L \cdot \alpha \cdot \left( \sigma + 1 - \sqrt{(\sigma - 1)^2} \right) = (2 - 4\eta_h) \cdot \begin{cases} \eta_1, & \sigma > 1 \\ \eta_2, & \sigma < 1 \end{cases}. \quad (10)$$

Это согласуется с упомянутым ранее свойством амплитуд в минимальной струне: размерность пространства конформных блоков пропорциональна наименьшему из чисел  $\eta_1, \eta_2$ , которое зависит от знака  $(\sigma - 1)$ .

В **подразделе 3.3.4** проводится аналогичное вычисление для случая одного пертурбативно-тяжелого оператора в точке  $x$  с параметром  $\eta_l$  и трех тяжелых операторов с параметрами  $\kappa_2/2, \kappa_1/2, \kappa_1/2$  в точках  $0, 1, \infty$ . Решение в нулевом порядке известно из [35]. Выражение для аксессуарного параметра из условия унитарности монодромии получено в терминах гипергеометрических функций. Поскольку метрика даётся полной производной от  $c$ , для вычисления объема достаточно просуммировать граничные вклады от точек, где  $c$  сингулярно, которые совпадают с границей пространства модулей  $\mathcal{M}_{0,4}$ . Сумма трёх граничных вкладов даётся

$$\eta_l(2 - 2\kappa_1 - \kappa_2), \quad (11)$$

что согласуется с (7) в первом порядке по  $\eta_l$ .

В **подразделе 3.3.5** обсуждается, как можно было бы обобщить численный метод раздела 3.2 для проверки ответов из метода монодромии в области параметров малых  $\kappa$ . Предполагается, что для этого нужно учесть «дискретные члены» в лиувиллевском ОРЕ. В пределе  $b \rightarrow 0$  имеется бесконечно много таких вкладов, которые должны быть просуммированы.

В **разделе 3.4** обсуждается, как эти вычисления связаны с другим определением [36] для меры на пространствах модулей поверхностей с коническими дефектами, которое тоже согласуется с квазиклассическим ответом для минимальной струны.

**Глава 4** посвящена нескольким результатам, полученным для  $(2, 2p+1)$  минимальной струны в подходе топологической рекурсии. В ней предложены несколько общих формул, позволяющих вычислять амплитуды систематически. Глава содержит результаты работ [III] и [IV].

В **разделе 4.1** рассматривается класс наблюдаемых в «матричной модели» минимальной струны, впервые введённый в [37], и их связь с тахионными корреляторами. Эти корреляторы  $V_{g,n}^p(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  получили название « $p$ -деформированные объёмы»; они вычисляются с помощью интегрального преобразования от  $W_{g,n}(z_1, \dots, z_n)$  и полиномиальны по параметрам. Эти корреляторы сводятся к известным из геометрии объёмам Вейля-Петерсона в классическом пределе.

В **подразделе 4.1.1** объяснена связь между  $p$ -деформированными объёмами и тахионными амплитудами. Утверждается, что в области параметров  $k_i + k_j > p - 3$  они связаны аналитическим продолжением:

$$\frac{\partial^n \mathcal{F}_g}{\partial \tau_{k_1} \dots \partial \tau_{k_n}} \Big|_{\tau_1 = -\frac{1}{2}, \tau_2 \dots \tau_p = 0} \sim V_{g,n}^p \left( \vec{\lambda} = \frac{i}{2} (2(p - \vec{k}) + 1) \right). \quad (12)$$

Эта связь проиллюстрирована на известных примерах с малыми  $g$  и  $n$ , а также аргументирована более общим способом, описав соответствующую таким корреляторам деформацию спектральной кривой и сравнив её с тем, что появляется при деформации оператором  $\mathcal{T}_{1,k}$  в [18]. При данных условиях на  $k_i$  упрощаются «резонансные преобразования» — формулы, связывающие КП-времена  $t$  и переменные  $\tau$ .

В **подразделе 4.1.2** сравниваются спектральные кривые для минимальной струны и Вирасоро-минимальной струны [2]. Показано, что спектральную кривую топологической рекурсии для этих двух теорий можно привести к одному виду заменой локальной параметризации  $z(s) = \frac{1}{\pi b^2} \sin \pi b s$ ; отличие между этими теориями будет лежать в выборе другого начального данного — бидифференциала  $\tilde{W}_{0,2}(s)$ . В параметризации  $s$  связь между  $n$ -дифференциалами и  $p$ -деформированными объёмами сво-

дится к обратному преобразованию Лапласа

$$V_{g,n}^p(\vec{\lambda}) = (8\pi^3 b^4)^{2g-2+n} \operatorname{Res}_{z_k=0} \tilde{W}_{g,n}(s_1, \dots, s_n) \prod_{k=1}^n \frac{ds_k}{2\pi b^2 \lambda_k} e^{2\pi b \lambda_k s_k}. \quad (13)$$

В подразделе 4.1.3 наблюдение из предыдущего раздела используется, чтобы получить формулу для  $V_{g,n}^p$  в терминах чисел пересечений тавтологических классов на пространстве модулей кривых  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ . Для вывода такого представления используется метод, разработанный в [38]. В терминах стандартных классов когомологий  $\psi_i$ ,  $\kappa_k$  и  $\delta_{k,l}$  (определение см., например, в [39]) получена формула

$$V_{g,n}^p \left( \vec{\lambda} \equiv \frac{2\vec{P}}{b} \right) = (8\pi^2 b^2)^{3g-3+n} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} e^{\frac{c-13}{24} \kappa_1 - \sum_{m \geq 1} \frac{B_{2m}}{(2m)(2m)!} \kappa_{2m} + \sum_{k=1}^n P_k^2 \psi_k + \sum_{k \geq 0} \bar{b}_k \delta_{k,0}}, \quad (14)$$

где коэффициенты  $\bar{b}_k$  заданы производящим рядом

$$e^{-\sum_{k \geq 0} (2\pi)^{2k+2} \bar{b}_k (u_1+u_2)^{k+1}} \frac{-1}{u_1+u_2} = \sum_{m \geq 1} (-1)^m \frac{2^{1-2m} - 1}{m!} ((\pi b)^2 (u_1+u_2))^{m-1} B_{2m}. \quad (15)$$

Такое представление аналогично известному для Вирасоро-минимальной струны и отличается наличием  $\delta$ -классов. Оно позволяет вычислять  $p$ -деформированные объемы систематически для произвольных  $g$  и  $n$ .

В разделе 4.2 предложено новое определение дуального подхода к  $(2, 2p+1)$  минимальной струне, связанное с обычным « $x-y$  заменой». Эта переформулировка проясняет технические и концептуальные сложности в предыдущем подходе и, в частности, позволяет обойтись без применения «резонансных преобразований».

Выдвинута гипотеза, что тахионные корреляционные числа выражаются через  $n$ -дифференциалы  $\check{\omega}_{g,n}(z_1, \dots, z_n)$ , полученные по спектральной кривой МС после  $x-y$  замены, как

$$\check{A}_n^g(k_1, \dots, k_n) = \operatorname{Res}_{z_1=\infty} \dots \operatorname{Res}_{z_n=\infty} \left( \check{\omega}_{g,n}(z_1, \dots, z_n) \prod_{i=1}^n \frac{T_{2(p-k_i)+1}(z_i)}{2(p-k_i)+1} \right). \quad (16)$$

В подразделе 4.2.1 поясняется, почему такой вид преобразования естественен с точки зрения интегрируемых иерархий: для  $x - y$  двойственной тау-функции оно просто вычисляет производные по КП-временам.

В подразделе 4.2.2 утверждение гипотезы проверяется на конкретных примерах для малых  $g$  и  $n$ . Так, для простейшего примера трёхточечной амплитуды на сфере можно получить

$$\check{A}_3^0 = \frac{1}{2(2p+1)} \cdot b^2 \sum_{m=1}^{2p} \frac{\prod_{i=0}^2 \sin \frac{2\pi m k_i}{(2p+1)}}{\sin \pi m b^2}.$$

Из подхода мирового листа известно, что трёхточечная амплитуда должна быть пропорциональна размерности пространства конформных блоков  $\mathcal{N}_{k_1 k_2 k_3}^{(0)}$  («fusion-константе») в минимальной модели, т.е. с точностью до нормировки равняться 0 или 1. То, что сумма выше вычисляет fusion-константу, известно в литературе как «формула Верлинде» [40]. Прямым вычислением получены также ответы для  $\check{A}_4^0$  и  $\check{A}_1^1$  и проверено, что они согласуются с результатами из других подходов. Они наиболее просто выражаются в терминах многоточечных «fusion-констант»  $\mathcal{N}_{i_1 \dots i_k}^{(g)}$  и «квантовых объемов»  $V_{g,n}^b$  — амплитуд в Вирасоро-минимальной струне [2].

В подразделе 4.2.3 замечено, что разные слагаемые в выражениях для  $\check{A}_g^n$  можно сопоставить различным «стабильным графам»  $\Gamma$ , перечисляющим компоненты границы в пространстве модулей стабильных кривых  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ . Приведены ответы для следующих по сложности амплитуд  $\check{A}_5^0$  и  $\check{A}_2^1$  и показано, что они тоже имеют такую структуру. Как обобщение рассмотренных примеров предложена общая формула для  $\check{A}_n^g$ , в которой стабильные графы интерпретируются как «фейнмановские диаграммы».

Её можно записать как

$$\check{A}_n^g(\vec{k}) = \sum_{\Gamma} \frac{1}{|\text{Aut}(\Gamma)|} \sum_{\vec{k}_e; k_e=1}^p \sum_{\vec{n}_e; n_e=1}^{\infty} \prod_e \left[ \frac{4^{n_e} B_{2n_e}(|bP_{1,-k_e}|)}{n_e!} \right] \prod_v \mathcal{N}_{\vec{k}_v}^{(g_v)} \times \\ \times \left( \prod_e \left( \frac{-\partial}{4b^2 \partial(P_{1,-k_e}^2)} \right)^{n_e-1} \prod_v \frac{V_{g_v, n_v}^b(4\pi b P_{1,-\vec{k}_v})}{(2\pi^2)^{3g_v+n_v-3}} \right) \Big|_{P_e^2=0}, \quad (17)$$

где каждому ребру графа сопоставляется два числа  $k_e = 1 \dots p$  и  $n_e \in \mathbb{N}$  и сумма выше ведется по всем таким сопоставлениям;  $B_n(x)$  — полиномы Бернулли. Также существует более компактная формальная запись

$$\check{A}_n^g(\vec{k}) = \sum_{\Gamma} \frac{1}{|\text{Aut}(\Gamma)|} \sum_{\vec{k}_e \in \mathbb{Z}} \prod_v \left( \mathcal{N}_{\vec{k}_v}^{(g_v)} \frac{V_{g_v, n_v}^b(4\pi b P_{1,-\vec{k}_v})}{(2\pi^2)^{3g_v+n_v-3}} \right) \prod_e 2b|P_{1,-k_e}|, \quad (18)$$

где расходящиеся суммы по  $k_e \in \mathbb{Z}$  интерпретируются в смысле дзета-регуляризации.

В **подразделе 4.2.4** обсуждается предел  $p \rightarrow \infty$ , в котором  $(2, 2p+1)$  минимальная струна сводится к теории гравитации Джакива-Тейтельбойма (JT), а амплитуды — к объемам пространств модулей поверхностей постоянной кривизны с коническими дефектами. Из результатов, изложенных выше, следует, что существует подход к вычислению таких объемов с использованием спектральной кривой JT-гравитации после  $x-y$  замены. Это демонстрируется на нескольких простейших примерах. Также показано, что в этом пределе можно аргументировать появление ряда из полиномов Бернулли в формуле (17).

В **главе 5** (заклучении) сформулированы выносимые на защиту результаты диссертации.

## Список литературы

1. *Saad P., Shenker S. H., Stanford D.* JT gravity as a matrix integral. — 2019. — arXiv: [1903.11115 \[hep-th\]](#).
2. The Virasoro Minimal String / S. Collier [и др.] // *SciPost Phys.* — 2024. — Т. 16. — С. 057. — DOI: [10.21468/SciPostPhys.16.2.057](#). — arXiv: [2309.10846 \[hep-th\]](#).
3. The complex Liouville string / S. Collier [и др.]. — 2024. — Сент. — arXiv: [2409.17246 \[hep-th\]](#).
4. *Collier S., Eberhardt L., Mühlmann B.* A microscopic realization of  $dS_3$  // *SciPost Phys.* — 2025. — Т. 18, № 4. — С. 131. — DOI: [10.21468/SciPostPhys.18.4.131](#). — arXiv: [2501.01486 \[hep-th\]](#).
5. *Iliesiu L. V., Turiaci G. J.* The statistical mechanics of near-extremal black holes // *JHEP.* — 2021. — Т. 05. — С. 145. — DOI: [10.1007/JHEP05\(2021\)145](#). — arXiv: [2003.02860 \[hep-th\]](#).
6. *Polyakov A. M.* Quantum Gravity in Two-Dimensions // *Mod. Phys. Lett. A.* — 1987. — Т. 2. — С. 893. — DOI: [10.1142/S0217732387001130](#).
7. *David F.* Conformal Field Theories Coupled to 2D Gravity in the Conformal Gauge // *Mod. Phys. Lett. A.* — 1988. — Т. 3. — С. 1651. — DOI: [10.1142/S0217732388001975](#).
8. *Distler J., Kawai H.* Conformal field theory and 2D quantum gravity // *Nuclear Physics B.* — 1989. — Т. 321, № 2. — С. 509–527. — ISSN 0550-3213. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(89\)90354-4](https://doi.org/10.1016/0550-3213(89)90354-4). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321389903544>.
9. *Knizhnik V. G., Polyakov A. M., Zamolodchikov A. B.* Fractal Structure of 2D Quantum Gravity // *Mod. Phys. Lett. A* / под ред. I. M. Khalatnikov, V. P. Mineev. — 1988. — Т. 3. — С. 819. — DOI: [10.1142/S0217732388000982](#).

10. *David F.* A Model of Random Surfaces with Nontrivial Critical Behavior // Nucl. Phys. B. — 1985. — Т. 257. — С. 543–576. — DOI: [10.1016/0550-3213\(85\)90363-3](https://doi.org/10.1016/0550-3213(85)90363-3).
11. *Douglas M. R., Shenker S. H.* Strings in Less Than One-Dimension // Nucl. Phys. B / под ред. E. Brezin, S. R. Wadia. — 1990. — Т. 335. — С. 635. — DOI: [10.1016/0550-3213\(90\)90522-F](https://doi.org/10.1016/0550-3213(90)90522-F).
12. *Brezin E., Kazakov V. A.* Exactly Solvable Field Theories of Closed Strings // Phys. Lett. B. — 1990. — Т. 236. — С. 144–150. — DOI: [10.1016/0370-2693\(90\)90818-Q](https://doi.org/10.1016/0370-2693(90)90818-Q).
13. *Douglas M. R.* Strings in Less Than One-dimension and the Generalized  $K^-D^-V$  Hierarchies // Phys. Lett. B / под ред. E. Brezin, S. R. Wadia. — 1990. — Т. 238. — С. 176. — DOI: [10.1016/0370-2693\(90\)91716-0](https://doi.org/10.1016/0370-2693(90)91716-0).
14. *Daul J. M., Kazakov V. A., Kostov I. K.* Rational theories of 2-D gravity from the two matrix model // Nucl. Phys. B. — 1993. — Т. 409. — С. 311–338. — DOI: [10.1016/0550-3213\(93\)90582-A](https://doi.org/10.1016/0550-3213(93)90582-A). — arXiv: [hep-th/9303093](https://arxiv.org/abs/hep-th/9303093).
15. *Witten E.* Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space // Surveys Diff. Geom. — 1991. — Т. 1. — С. 243–310. — DOI: [10.4310/SDG.1990.v1.n1.a5](https://doi.org/10.4310/SDG.1990.v1.n1.a5).
16. *Kontsevich M.* Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function // Commun. Math. Phys. — 1992. — Т. 147. — С. 1–23. — DOI: [10.1007/BF02099526](https://doi.org/10.1007/BF02099526).
17. *Moore G. W., Seiberg N., Staudacher M.* From loops to states in 2-D quantum gravity // Nucl. Phys. B. — 1991. — Т. 362. — С. 665–709. — DOI: [10.1016/0550-3213\(91\)90548-C](https://doi.org/10.1016/0550-3213(91)90548-C).
18. *Seiberg N., Shih D.* Branes, rings and matrix models in minimal (super)string theory // JHEP. — 2004. — Т. 02. — С. 021. — DOI: [10.1088/1126-6708/2004/02/021](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2004/02/021). — arXiv: [hep-th/0312170](https://arxiv.org/abs/hep-th/0312170).
19. *Kazakov V. A.* The Appearance of Matter Fields from Quantum Fluctuations of 2D Gravity // Mod. Phys. Lett. A / под ред. E. Brezin, S. R. Wadia. — 1989. — Т. 4. — С. 2125. — DOI: [10.1142/S0217732389002392](https://doi.org/10.1142/S0217732389002392).
20. The Ising Model Coupled to 2-D Gravity: A Nonperturbative Analysis / E. Brezin [и др.] // Phys. Lett. B. — 1990. — Т. 237. — С. 43–46. — DOI: [10.1016/0370-2693\(90\)90458-I](https://doi.org/10.1016/0370-2693(90)90458-I).

21. *Belavin A. A., Zamolodchikov A. B.* On correlation numbers in 2D minimal gravity and matrix models // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2009. — Июль. — Т. 42, № 30. — С. 304004. — ISSN 1751-8121. — DOI: [10.1088/1751-8113/42/30/304004](https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/30/304004). — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/42/30/304004>.
22. *Zamolodchikov A., Zamolodchikov A.* Conformal bootstrap in Liouville field theory // Nuclear Physics B. — 1996. — Окт. — Т. 477, № 2. — С. 577–605. — ISSN 0550-3213. — DOI: [10.1016/0550-3213\(96\)00351-3](https://doi.org/10.1016/0550-3213(96)00351-3). — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213\(96\)00351-3](http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213(96)00351-3).
23. *Dorn H., Otto H.-J.* Two- and three-point functions in Liouville theory // Nuclear Physics B. — 1994. — Окт. — Т. 429, № 2. — С. 375–388. — ISSN 0550-3213. — DOI: [10.1016/0550-3213\(94\)00352-1](https://doi.org/10.1016/0550-3213(94)00352-1). — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213\(94\)00352-1](http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213(94)00352-1).
24. *Zamolodchikov A. B.* Three-point function in the minimal Liouville gravity // Theor. Math. Phys. — 2005. — Т. 142. — С. 183–196. — DOI: [10.1007/s11232-005-0003-3](https://doi.org/10.1007/s11232-005-0003-3). — arXiv: [hep-th/0505063](https://arxiv.org/abs/hep-th/0505063).
25. *Zamolodchikov A.* Higher equations of motion in Liouville field theory // International Journal of Modern Physics A. — 2004. — Май. — Т. 19, supp02. — С. 510–523. — ISSN 1793-656X. — DOI: [10.1142/S0217751X04020592](https://doi.org/10.1142/S0217751X04020592). — URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X04020592>.
26. Polyakov's string: Twenty five years after. Proceedings / под ред. А. Belavin, А. Zamolodchikov. — 10.2005. — arXiv: [hep-th/0510214](https://arxiv.org/abs/hep-th/0510214).
27. *Belavin A., Dubrovin B., Mukhametzhano B.* Minimal Liouville Gravity correlation numbers from Douglas string equation // JHEP. — 2014. — Т. 01. — С. 156. — DOI: [10.1007/JHEP01\(2014\)156](https://doi.org/10.1007/JHEP01(2014)156). — arXiv: [1310.5659](https://arxiv.org/abs/1310.5659) [[hep-th](https://arxiv.org/abs/hep-th)].
28. *Belavin A. A., Belavin V. A.* Frobenius manifolds, Integrable Hierarchies and Minimal Liouville Gravity // JHEP. — 2014. — Т. 09. — С. 151. — DOI: [10.1007/JHEP09\(2014\)151](https://doi.org/10.1007/JHEP09(2014)151). — arXiv: [1406.6661](https://arxiv.org/abs/1406.6661) [[hep-th](https://arxiv.org/abs/hep-th)].
29. The complex Liouville string: the worldsheet / S. Collier [и др.]. — 2024. — Сент. — arXiv: [2409.18759](https://arxiv.org/abs/2409.18759) [[hep-th](https://arxiv.org/abs/hep-th)].
30. *Turiaci G. J., Ustyuk M., Weng W. W.* 2D dilaton-gravity, deformations of the minimal string, and matrix models // Classical and Quantum Gravity. — 2021. — Сент. — Т. 38, № 20. — С. 204001. — ISSN 1361-

6382. — DOI: [10.1088/1361-6382/ac25df](https://doi.org/10.1088/1361-6382/ac25df). — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/ac25df>.
31. *Gregori P., Schiappa R.* From minimal strings towards Jackiw–Teitelboim gravity: on their resurgence, resonance, and black holes // *Class. Quant. Grav.* — 2024. — Т. 41, № 11. — С. 115001. — DOI: [10.1088/1361-6382/ad32df](https://doi.org/10.1088/1361-6382/ad32df). — arXiv: [2108.11409](https://arxiv.org/abs/2108.11409) [hep-th].
32. *Eynard B., Orantin N.* Invariants of algebraic curves and topological expansion // *Commun. Num. Theor. Phys.* — 2007. — Т. 1. — С. 347–452. — DOI: [10.4310/CNTP.2007.v1.n2.a4](https://doi.org/10.4310/CNTP.2007.v1.n2.a4). — arXiv: [math-ph/0702045](https://arxiv.org/abs/math-ph/0702045).
33. *Tarnopolskiy G. M.* Five-point correlation numbers in a one-matrix model // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* — 2011. — Июль. — Т. 44, № 32. — С. 325401. — ISSN 1751-8121. — DOI: [10.1088/1751-8113/44/32/325401](https://doi.org/10.1088/1751-8113/44/32/325401). — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/44/32/325401>.
34. *Belavin A. A., Tarnopolsky G. M.* Two-dimensional gravity in genus one in matrix models, topological and liouville approaches // *JETP Letters.* — 2010. — АБГ. — Т. 92, № 4. — С. 257–267. — ISSN 1090-6487. — DOI: [10.1134/s0021364010160137](https://doi.org/10.1134/s0021364010160137). — URL: <http://dx.doi.org/10.1134/S0021364010160137>.
35. *Alkalaev K., Pavlov M.* Four-point conformal blocks with three heavy background operators // *Journal of High Energy Physics.* — 2019. — АБГ. — Т. 2019, № 8. — DOI: [10.1007/jhep08\(2019\)038](https://doi.org/10.1007/jhep08(2019)038).
36. *Eberhardt L., Turiaci G. J.* 2D dilaton gravity and the Weil-Petersson volumes with conical defects. — 2023. — arXiv: [2304.14948](https://arxiv.org/abs/2304.14948) [hep-th].
37. *Mertens T. G., Turiaci G. J.* Liouville quantum gravity — holography, JT and matrices // *Journal of High Energy Physics.* — 2021. — ЯНВ. — Т. 2021, № 1. — ISSN 1029-8479. — DOI: [10.1007/jhep01\(2021\)073](https://doi.org/10.1007/jhep01(2021)073). — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP01\(2021\)073](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP01(2021)073).
38. *Eynard B.* Intersection numbers of spectral curves. — 2011. — Абр. — arXiv: [1104.0176](https://arxiv.org/abs/1104.0176) [math-ph].
39. *Zvonkine D.* An introduction to moduli spaces of curves and their intersection theory. — 2012. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:124196489>.

40. *Verlinde E. P.* Fusion Rules and Modular Transformations in 2D Conformal Field Theory // Nucl. Phys. B. — 1988. — T. 300. — C. 360–376. — DOI: [10.1016/0550-3213\(88\)90603-7](https://doi.org/10.1016/0550-3213(88)90603-7).