

Еремин Борис Андреевич

Зеркальная симметрия многообразий Калаби-Яу и $N=2$ суперконформные двумерные теории поля

Специальность 1.3.3 —
«Теоретическая физика»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель — Белавин Александр Абрамович, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, профессор, ФГБУН Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук, главный научный сотрудник.

Официальные оппоненты:

Кривонос Сергей Олегович — доктор физико-математических наук, Международная межправительственная организация Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна, Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, Отдел современной математической физики, начальник отдела

Зотов Андрей Владимирович — доктор физико-математических наук, ФГБУН Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, г. Москва, Отдел теоретической физики, ведущий научный сотрудник

Ведущая организация: ФГБУН Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук

Защита состоится _____ в _____ на заседании диссертационного совета **24.1.128.01** при ФГБУН Институте теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук по адресу: Московская область, г. Черноголовка, просп. Академика Семенова, д. 1А.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБУН Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук или на сайте диссертационного совета <https://www.itp.ac.ru/ru/dissertation-council/>

Автореферат разослан «__» _____ 2025 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета

24.1.128.01

д-р физ.-мат. наук

Адлер Всеволод Эдуардович

Общая характеристика работы

Одной из основных задач современной теоретической физики является проблема объединения Стандартной модели физики элементарных частиц и квантовой гравитации, а также описание всех четырех фундаментальных взаимодействий на едином языке. Теория струн является перспективным кандидатом на роль такой теории. Непротиворечивая теория струн, содержащая бозоны и фермионы, а также не имеющая конформной аномалии, возникает в размерности пространства-времени, равной 10 [1]. Для получения четырехмерной теории в пространстве-времени Минковского, обладающей $N = 1$ суперсимметрией, необходимо компактифицировать оставшиеся 6 из 10 измерений на многообразии Калаби-Яу [2].

Многообразия Калаби-Яу вызывают глубокий интерес среди математиков и физиков-теоретиков последние несколько десятилетий. Важнейшим свойством таких многообразий является зеркальная симметрия, которая предполагает для данного Калаби-Яу X существование зеркального двойника Y [3–5]. В диссертации исследуются конструкции построения зеркального партнера Y согласно подходам Батырева [6] и Берглунда-Хубша-Кравица (БХК) [7,8]. Конструкция Батырева позволяет строить зеркальные пары в торических многообразиях на основании двойственных многогранников, которые определяют многообразия Калаби-Яу. Конструкция Берглунда-Хубша-Кравица использует подход, основанный на группах фазовых симметрий многообразий Калаби-Яу. В диссертации также исследуется двойственность между Калаби-Яу и калибровочными линейными сигма-моделями, которая позволяет вычислять метрику [9] на пространстве модулей Калаби-Яу.

Альтернативный способ изучения компактификации предложил Д. Гепнер. В своей новаторской работе [10] он разработал алгебраический подход, который основан на методах конформной теории поля. Оказывается, что компактный сектор теории суперструн представляет собой $N = 2$ суперсимметричную двумерную конформную теорию поля на мировом листе. Центральный заряд этой теории равен 9. В таких моделях удивительным образом возникает зеркальная симметрия между пространствами состояний [3, 11]. В главе 4 рассмотрен специальный класс таких теорий, которые представляют собой произведение $N = 2$ минимальных моделей типа ADE, на которых действует допустимая группа симметрии G . Мы явно построим полный набор ло-

кальных полей при помощи спектрального потока и аксиом конформного бутстрапа [12]. В диссертации также исследуется вопрос построения зеркально-двойственных конформных теорий поля, которые определяются при помощи дуальной группы симметрии G^* . Это проделано для широкого класса моделей, упомянутых выше. Оказывается, что конформные теории поля, построенные по взаимно-двойственным группам G и G^* , являются эквивалентными, то есть имеют изоморфные пространства состояний.

Цели и задачи диссертационного исследования

Диссертация посвящена исследованию конструкций зеркального двойника для многообразия Калаби-Яу, определяемого нулями обратимого многочлена из списка Берглунда-Хубша. А также построению моделей суперсимметричных конформных теорий поля, которые возникают как компактный сектор в теории суперструн. А именно:

- Построение зеркального партнера к многообразию Калаби-Яу, которое определяется нулями некоторого полинома во взвешенном проективном пространстве на основании двух конструкций: Батырева и Берглунда-Хубша-Кравица. Доказательство эквивалентности этих двух конструкций;
- Изучение дуальности между многообразиями Калаби-Яу и двумерными суперсимметричными калибровочными линейными сигма-моделями, проверка зеркальной версии гипотезы Джокерса и соавторов;
- Построение моделей суперконформной теории поля с центральным зарядом, равным 9, описание пространства локальных полей;
- Исследование зеркальной симметрии на уровне конформных теорий поля, построенных как орбифолды произведений $N = 2$ минимальных моделей.

Основные положения, выносимые на защиту диссертации

1. Конструкции зеркальной симметрии Батырева и Берглунда-Хубша-Кравица (БХК) для класса орбифолдов Калаби-Яу, задаваемых обратимыми полиномами W_M во взвешенных проективных пространствах, оказываются полностью эквивалентными.
2. Степени мономов-деформаций полиномов, образующих зеркальные пары орбифолдов Калаби-Яу, связаны уравнениями. В уравнения входит обратная матрица степеней многочлена W_M .
3. Результаты построения зеркального партнера для орбифолдов квинтики согласованы с конструкциями БХК и Батырева.
4. Установлена двойственность между многообразиями Калаби-Яу и калибровочными линейными сигма-моделями (КЛСМ) для специального класса многообразий из списка Берглунда-Хубша. Гипотеза о равенстве метрики на пространстве модулей многообразий Калаби-Яу и статистической суммы КЛСМ верна для рассмотренного класса многообразий.
5. Построены $N = 2$ суперконформные интегрируемые теории поля с центральным зарядом равным 9, которые реализованы как орбифолды произведений $N = 2$ минимальных моделей типа ADE по некоторой допустимой группе G . Конструкция построения твистованных состояний согласована с модулярными инвариантами из списка ADE. Спектр взаимно локальных полей модели нумеруется элементами двойственной группы G^* . Уравнения, связывающие элементы групп G и G^* , аналогичны уравнениям для минимальных моделей с инвариантами типа A.
6. Зеркальная модель $N = 2$ суперконформного орбифолда типа ADE строится по двойственной группе G^* . Перестановка групп G и G^* осуществляется зеркальным спектральным потоком. Пространства состояний моделей, построенных по группам G и G^* , оказываются изоморфными.

Актуальность

Последние четыре десятилетия теория суперструн является мощным источником задач для современной теоретической физики и математики, оставаясь при этом наиболее перспективным кандидатом на роль теории квантовой гравитации. Компактные измерения в теории суперструн — многообразия Калаби-Яу обладают рядом замечательных свойств, одно из которых — зеркальная симметрия. Данное явление предполагает наличие глубокой геометрической связи между попарно различными многообразиями Калаби-Яу и активно изучается как физиками, так и математиками. С практической точки зрения, зеркальная симметрия позволяет вычислять метрику на пространстве модулей комплексных и кэлеровых структур многообразия Калаби-Яу, которая входит в лагранжиан эффективной теории супергравитации.

Альтернативный, алгебраический взгляд на проблему компактификации — состоит в построении моделей $N = 2$ суперсимметричной конформной теории поля и описании их пространств состояний при помощи методов модулярного или конформного бутстрапа [10, 13]. Взаимно локальные поля в этих моделях отвечают безмассовым состояниям струны. Важно отметить, что аппарат конформной теории поля находит применение в широком спектре физических задач: от описания критических явлений в статистической физике (например, модель Изинга) и теории представлений алгебры Вирасоро до исследования интегрируемых моделей и анализа спектра безмассовых состояний в теории струн. В настоящей диссертации строятся модели интегрируемой суперсимметричной конформной теории поля с полным описанием пространства состояний. Эти модели удовлетворяют требованиям локальности, замкнутости операторной алгебры и другим аксиомам конформного бутстрапа. Исследование моделей с произвольным модулярным инвариантом из ADE-классификации открывает путь к построению феноменологически перспективных теорий суперструн с тремя поколениями заряженных частиц.

Наконец, отдельного внимания заслуживают двумерные $N = (2, 2)$ суперсимметричные калибровочные линейные сигма-модели. Они замечательны тем, что для них применима техника суперсимметричной локализации, которая позволила вычислить статистическую сумму этих моделей точно [14, 15]. Таким образом, используя дуальность Калаби-Яу/КЛСМ, предсказанную в [16], а также зеркальную симметрию, можно вычислять специаль-

ную геометрию на пространстве модулей кэлеровых структур для семейства Калаби-Яу. Метрика на пространстве модулей явно содержится в лагранжиане теории супергравитации.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются оригинальными и впервые получены автором в сотрудничестве с научным руководителем и коллегами. Эквивалентность конструкций зеркальной симметрии Батырева и Берглунд-Хубша предполагалась математиками и формулировалась в качестве гипотез в ряде статей. В работе [I] впервые было явно найдено уравнение, определяющее зеркального партнёра Y в торическом многообразии для многообразия Калаби-Яу X , построенного по конструкции Батырева. При этом X задается как орбифолд гиперповерхности типа Берглунда-Хубша и определяется нулями обратимого многочлена, что отвечает достаточно широкому классу Калаби-Яу. Явно построено отображение, связывающее зеркальную гиперповерхность во взвешенном проективном пространстве, построенную по конструкции Берглунда-Хубша, и гиперповерхность в торическом многообразии, построенную по конструкции Батырева. В работе [II] конструкция построения зеркальных партнеров продемонстрирована явно на примере орбифолдов квинтики.

В работах [III] и [IV] построена дуальная калибровочная линейная сигма-модель для многообразий Калаби-Яу, не относящихся к классу Ферма. Проверена гипотеза Джокерса и соавторов о равенстве статистической суммы КЛСМ и экспоненты кэлерова потенциала на пространстве кэлеровых модулей многообразия Калаби-Яу, которое является пространством суперсимметричных вакуумов данной КЛСМ. До работ автора эта гипотеза была проверена только для случая Калаби-Яу типа Ферма, имеющих полиномиальные деформации. В остальных случаях отмечалась проблема при вычислении статсуммы. Проблему удалось разрешить в [III], основываясь на идее множественных зеркал.

До выполнения настоящей диссертационной работы был неизвестен полный спектр полей в орбифолдах произведений $N = 2$ минимальных моделей типа ADE, которые связаны с сигма-моделями на соответствующих Калаби-Яу. Вычислялись только размерности киральных колец (киральных-

киральных и антикиральных-киральных). Следуя принципу локальности и используя конструкцию спектрального потока, впервые был предложен явный алгоритм построения пространства состояний в таких моделях. Также исследована зеркально-двойственная модель и получены условия на дуальную группу. Доказано, что модели, построенные по взаимно-двойственным группам, являются эквивалентными в смысле изоморфизма пространств состояний.

Работа [V] является обзорной и посвящена зеркальной симметрии и специальной геометрии, возникающей на пространстве модулей Калаби-Яу.

Практическая и научная ценность

Исследования, представленные в диссертационной работе, носят теоретический характер и находят применение в струнной феноменологии, геометрии многообразий Калаби-Яу, а также при изучении интегрируемых моделей конформной теории поля. Изучение зеркальной симметрии позволяет устанавливать фундаментальные дуальности в теории струн, такие как соответствие между компактификациями суперструн типа IIA и IIB. Кроме того, оно даёт возможность вычислять числа Ходжа $h_{1,1}$ и $h_{2,1}$ для зеркальных пар многообразий Калаби-Яу, что критически важно для определения числа поколений частиц в струнной компактификации — эта величина задаётся разностью $|h_{1,1} - h_{2,1}|$. Результаты, полученные при исследовании конструкций зеркальной симметрии в работах [I], [II], могут быть использованы научными группами, которые работают в области алгебраической геометрии.

Результат, полученный в работах [IV] и [III] позволяет вычислять метрику на пространстве модулей многообразий Калаби-Яу. Эта метрика непосредственно входит в лагранжиан эффективной теории супергравитации, возникающей как низкоэнергетический предел теории струн.

Пространство полей $N = 2$ суперконформных теорий поля с центральным зарядом $c = 9$ соответствует компактному сектору безмассовых состояний в теории суперструн. При этом среди моделей типа **A**, спектр которых был изучен ранее, отсутствуют модели, дающие ровно три поколения кварков. Таким образом, полученные результаты открывают возможность построения феноменологически реалистичных моделей теории струн. Предложенная явная конструкция полей позволит непосредственно вычислять корреля-

ционные функции в этих теориях.

Степень достоверности и апробация работы

Результаты исследований, вошедших в диссертацию, многократно представлялись соискателем на конференциях и семинарах. А именно:

Семинары: Центра перспективных исследований им. Кричевера в Сколтехе, лаборатории Квантовой физики и информации Института проблем передачи информации им. Харкевича РАН (г. Москва), Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау (г. Черноголовка), лаборатории алгебраической геометрии и гомологической алгебры МФТИ (г. Долгопрудный), отдела теоретической физики Математического института им. В.А. Стеклова РАН (г. Москва), семинаре по квантовой теории поля Физического института им. П.Н. Лебедева РАН (г. Москва).

Международные конференции: “Integrable Systems and Quantum Theory” (г. Санкт-Петербург, 2024), “Interaction Between Algebraic Geometry and QFT” (г. Долгопрудный, 2019).

Всероссийские конференции: “Молодежная конференция по теоретической и экспериментальной физике” (г. Москва, ИТЭФ, 2019, 2020), 62-, 63- и 65-я “Всероссийская научная конференция МФТИ” (г. Долгопрудный, МФТИ, 2019, 2020, 2022).

Публикации по теме диссертации

Основные результаты по теме диссертации изложены в следующих работах:

- I. *A. Belavin, B. Eremin.* On the equivalence of Batyrev and BHK mirror symmetry constructions // Nuclear Physics B. – 2020. – Т. **961**, С. 115271.
- II. *A. Belavin, B. Eremin.* Mirror pairs of Quintic orbifolds // JETP Letters. – 2020. – Т. 112, № 6. – С. 370–375.
- III. *A. A. Belavin, B. A. Eremin.* Multiple mirrors and the JKLMR conjecture // Theoretical and Mathematical Physics. – 2022. – Т. 213. – С. 1441–1452.

- IV. *A. Belavin, B. Eremin.* Partition Functions of $\mathcal{N} = (2, 2)$ Supersymmetric Sigma Models and Special Geometry on the Moduli Spaces of Calabi-Yau Manifolds // Theoretical and Mathematical Physics. – 2019. – Т. 201, №2. – С. 1606-1613
- V. *A. Belavin, B. Eremin, S. Parkhomenko.* Review on Special Geometry and Mirror Symmetry for Calabi-Yau Manifolds (Brief Review) // JETP Letters. – 2023. – Т. 118, №10. – С. 701-709.

Работы изданы в 5 печатных изданиях, 5 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК. Все результаты согласуются с результатами других специалистов, работающих в этой области, что подтверждает их достоверность.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав основного текста (главы 1–4), заключения (глава 5) и двух приложений (А, В). Общий объем диссертации составляет 122 страницы, включая 3 рисунка и 7 таблиц. Список литературы содержит 85 ссылок.

Содержание диссертации

Глава 1 имеет вводный характер. В ней рассматривается задача компактификации в теории суперструн. Приведены некоторые математические определения и утверждения о комплексных и кэлеровых многообразиях. Даны определения многообразий Калаби-Яу.

В **разделе 1.1** рассматривается теория суперструн в 10-мерном пространстве-времени. Это критическое значение размерности, при которой сокращается конформная аномалия [17, 18]. Спектр такой теории содержит бозоны и фермионы и не содержит тахионов. Таргет-пространство представляет собой произведение пространства Минковского и некоторого компактного многообразия: $\mathbb{R}^{1,3} \times X$ [2].

Эффективная теория в четырехмерном пространстве-времени будет содержать безмассовые поля, которые определяются как нулевые моды оператора Лапласа на X . Их можно отождествить с когомологиями $H^{1,2}(X)$ и $H^{1,1}(X)$ на компактном многообразии X .

Из инвариантности вакуума эффективной четырехмерной теории относительно генераторов суперсимметрии следует, что на многообразии X должен существовать ковариантно-постоянный спинор $\nabla \varepsilon = 0$. Это условие является одним из определений многообразия Калаби-Яу.

В разделе 1.2 даны определения комплексных и кэлеровых многообразий.

В разделе 1.3 формулируются эквивалентные определения многообразий Калаби-Яу.

В разделе 1.4 изучаются деформации комплексной и кэлеровой структуры на многообразиях Калаби-Яу. Деформации образуют пространства модулей комплексных $M_C(X)$ и кэлеровых $M_K(X)$ структур соответственно. Показано, что пространства модулей можно отождествить с когомологиями

$$H^{1,1}(X) \sim M_K(X), \quad H^{1,2}(X) \sim M_C(X). \quad (1)$$

А значит, имеется соответствие между безмассовыми состояниями струны и модулями комплексной и кэлеровой структуры.

В разделе 1.5 рассмотрен простейший пример многообразий Калаби-Яу — семейство квинтики в проективном пространстве $\mathbb{P}^4$.

Глава 2 посвящена конструкциям построения зеркального партнера для семейств орбифолдов Калаби-Яу X , которые определяются нулями обратимого многочлена. Явно построен зеркальный двойник Y согласно конструкциям БХК и Батырева, показана их эквивалентность. Глава содержит результаты работ [I],[II].

Глава начинается с обсуждения зеркальной симметрии, которая предполагает, что для пары трёхмерных комплексных многообразий Калаби-Яу (X, Y) существует изоморфизм когомологий:

$$H^{p,q}(X) \cong H^{3-p,q}(Y). \quad (2)$$

Учитывая (1), зеркальную симметрию можно понимать как совпадение спе-

циальной геометрии [9] на пространствах модулей:

$$M_C(X) \simeq M_K(Y), \quad M_K(X) \simeq M_C(Y). \quad (3)$$

В главе 2 и далее в тексте диссертации, в основном, будут рассматриваться многообразия Калаби-Яу, задаваемые нулями квази-однородного полинома

$$W_M(x) = \sum_{i=1}^5 \prod_{j=1}^5 x_j^{M_{ij}} \quad (4)$$

во взвешенном проективном пространстве

$$\mathbb{P}_{(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)}^4 = \left\{ (x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{C}^5 \setminus \{0\} \mid x_i \sim \lambda^{k_i} x_i \right\}. \quad (5)$$

Такие полиномы часто называют *обратимыми*. В частности, это означает, что число слагаемых в нём равно числу переменных. Многообразия, которые задаются его нулями, называются *обратимые особенности*. Полином должен удовлетворять следующим свойствам:

- (i) матрица M состоит из целочисленных элементов и обратима;
- (ii) многочлен W_M квази-однородный, то есть существует набор положительных целых чисел k_i (весов проективного пространства), а также число d (степень), такие, что:

$$\sum_{j=1}^5 M_{ij} k_j = d = \sum_{i=1}^5 k_i, \quad \forall i; \quad (6)$$

- (iii) полином W_M невырожден за пределами начала координат. Как было показано в работе [19], W_M должен быть суммой обратимых многочленов одного из трех видов: Ферма, цепь или петля:

$$\begin{aligned} x_1^{a_1} + x_2^{a_2} + \dots + x_n^{a_n} &- \text{Ферма} \\ x_1^{a_1} x_2 + x_2^{a_2} x_3 + \dots + x_n^{a_n} &- \text{цепь} \\ x_1^{a_1} x_2 + x_2^{a_2} x_3 + \dots + x_n^{a_n} x_1 &- \text{петля.} \end{aligned} \quad (7)$$

Многообразие Калаби-Яу X_M допускает деформацию комплексной и кэлеровой структуры. В терминах полиномов это можно реализовать как де-

формацию исходного W_M квази-однородными мономами e_s . Таким образом, полное семейство многообразий X_M задается нулями

$$W(x, \varphi) = \sum_{i=1}^5 \prod_{j=1}^5 x_j^{M_{ij}} + \sum_{s=1}^h \varphi_s e_s(x), \quad (8)$$

Параметры φ_s являются модулями комплексной структуры, а $h = h_{21}(X)$ — соответствующее число Ходжа¹ семейства X_M .

Раздел 2.1 посвящён конструкции зеркальной симметрии Берглунда-Хубша-Кравица. В оригинальной работе Берглунда и Хубша [7] была предложена конструкция, согласно которой зеркальный партнёр для гиперповерхности X_M , определяемой обратимым многочленом W_M , связан с гиперповерхностью X_{M^T} , заданной нулями “транспонированного” многочлена

$$W_{M^T}(z) = \sum_{i=1}^5 \prod_{j=1}^5 x_j^{(M^T)_{ij}} \quad (9)$$

в другом взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}_{(\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, \bar{k}_4, \bar{k}_5)}^4$. Авторы выдвинули гипотезу, что зеркало к X_M может быть реализовано как фактор гиперповерхности X_{M^T} по определённой подгруппе фазовой симметрии полинома W_{M^T} .

Данный подход был обобщён Кравицем [8]. Конструкция начинается с полинома W_M и соответствующей гиперповерхности X_M . Пусть $SL(M)$ — группа фазовой симметрии, сохраняющая $H^{3,0}(X_M)$, а $J_M \subseteq SL(M)$ — её подгруппа, порождённая действием $\mathbb{C}^*$ на $\mathbb{P}_{(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)}^4$. Выбирая подгруппу $G_0 \subseteq SL(M)$, содержащую J_M , можно показать, что фактор-пространство $Z(M, G) := X_M/G$, где $G = G_0/J_M$, является орбиолдом Калаби-Яу. Он определяется уравнением

$$W_X(x, \varphi) = W_M(x) + \sum_{l=1}^{h_X} \varphi_l \prod_{i=1}^5 x_i^{S_{li}} = 0. \quad (10)$$

Мономы $\prod_{i=1}^5 x_i^{S_{li}}$ принадлежат G -инвариантному подкольцу в кольце Милнора [11].

¹В общем случае — “полиномиальное число Ходжа”, то есть размерность пространства полиномиальных деформаций.

Аналогичная процедура применяется к “транспонированному” полиному W_{M^T} , что позволяет построить дуальный орбифолд Калаби-Яу $Z(M^T, G^*) := X_{M^T}/G^*$.

Кравиц предложил критерий выбора дуальной группы G^* , обеспечивающий, что $Z(M, G)$ и $Z(M^T, G^*)$ образуют зеркальную пару в смысле изоморфизма когомологий [8].

Итак, конструкция БХК предполагает, что полином W_{M^T} в сумме с мономами-деформациями $\bar{e}_m$ определяет орбифолд $Z(M^T, G^*)$, который по теореме Киодо-Руана является зеркалом к $Z(M, G)$. Зеркальный орбифолд $Y \equiv Z(M^T, G^*)$ будет задаваться в другом взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}_{(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_5)}^4$ уравнением

$$W_Y(y, \psi) = W_{M^T}(y) + \sum_{l=1}^{h_Y} \psi_m \prod_{i=1}^5 y_i^{R_{mi}} = 0, \quad (11)$$

при этом конструкция БХК явно задаёт дуальную группу симметрии G^* .

В работе [I] было показано, что условие инвариантности мономов $\prod_{i=1}^5 y_i^{R_{mi}}$ относительно G^* можно переписать как уравнения, связывающие степени мономов-деформаций исходного полинома W_M и зеркального W_{M^T} :

$$\langle \vec{S}_l, \vec{R}_m \rangle := B_{ij} S_{li} R_{mj} \in \mathbb{Z}, \quad (12)$$

где $B = M^{-1}$. Тем самым по исходному семейству X можно определить зеркало Y .

В **разделе 2.2** рассмотрена конструкция Батырева и построен зеркальный двойник (17) в торическом многообразии на основании этой конструкции. Показано, что результаты построения зеркального партнёра, согласно этим двум конструкциям, совпадают.

Согласно подходу В. Батырева [6], зеркальный партнёр для исходного орбифолда может быть построен следующим образом. Потенциал W_M дополняется допустимыми квази-однородными мономами, инвариантными относительно действия группы G

$$W_X(x, \varphi) = \sum_{i=1}^5 \prod_{j=1}^5 x_j^{M_{ij}} + \sum_{l=1}^{h_X} \varphi_l \prod_{j=1}^5 x_j^{S_{jl}} = \sum_{a=1}^{5+h_X} C_a(\varphi) \prod_{j=1}^5 x_j^{V_{aj}}. \quad (13)$$

Показатели степеней мономов расширенного потенциала определяют набор векторов $\vec{V}_a \in \mathbb{Z}^5$. После сдвига на $\vec{V}_{h_X+5} = (1, 1, 1, 1, 1)$, векторы $\vec{V}'_a := \vec{V}_a - \vec{V}_{h_X+5}$ оказываются лежащими в четырёхмерной подрешётке L , ортогональной вектору весов $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)$. Точки $\vec{V}'_a$ образуют рефлексивный многогранник Батырева $\Delta(M, G)$, ассоциированный с орбифолдом $Z(M, G)$, и связаны с рёбрами веера, двойственного к $\Delta(M, G)$.

Построение зеркального многообразия Y для $Z(M, G)$ осуществляется в два этапа. На первом этапе строится торическое многообразие T по вееру, соответствующему многограннику $\Delta(M, G)$ [6, 20]:

$$T := \frac{(\mathbb{C}^{h_X+4} - Z)}{(\mathbb{C}^*)^{h_X}}. \quad (14)$$

Где веса действия тора $(\mathbb{C}^*)^{h_X}$

$$y_a \rightarrow \lambda_l^{Q_{la}} y_a, \quad a = 1, \dots, h_X + 4, \quad l = 1, \dots, h_X. \quad (15)$$

удовлетворяют соотношениям [6, 20]

$$\sum_{a=1}^{h_X+4} Q_{la} \vec{V}'_a = 0, \quad l = 1, \dots, h_X. \quad (16)$$

На втором этапе определяется однородный полином W^Y , нули которого задают гиперповерхность, являющуюся зеркальным многообразием Калаби-Яу Y . В работе [I] был найден его явный вид:

$$W_Y(y_1, \dots, y_{h_X+4}) = \sum_{i=1}^5 \prod_{j=1}^5 y_j^{M_{ji}} \prod_{l=1}^{h_X-1} y_{l+5}^{S_{li}} + \sum_{m=1}^{h_Y} \psi_m \prod_{j=1}^5 y_j^{R_{mj}} \prod_{l=1}^{h_X-1} y_{l+5}^{(S_{lj} B_{ji} R_{mi})}. \quad (17)$$

Далее строится отображение торического многообразия T во взвешенное проективное пространство $\mathbb{P}^4_{(\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, \bar{k}_4, \bar{k}_5)}$, которое возникает в конструкции БХК. Отображение определяется формулами

$$z_j = y_j \prod_{l=1}^{h_X-1} y_{l+5}^{S_{li} B_{ij}}, \quad 1 \leq z_j \leq 5. \quad (18)$$

Тогда полином W^Y может быть переписан в этих координатах как

$$W^Y(z) = \sum_{i=1}^5 \prod_{j=1}^5 z_j^{(M^T)_{ij}} + \sum_{m=1}^{h_Y} \psi_m \prod_{j=1}^5 z_j^{R_{mj}}, \quad (19)$$

что совпадает с результатом конструкции Берглунда-Хубша-Кравица.

Тем самым продемонстрировано, что результат построения зеркального двойника для двух конструкций совпадает [I].

В **разделе 2.3** оба подхода построения зеркального двойника продемонстрированы на примере орбифолдов семейства квинтики.

В **главе 3** исследуется двойственность между Калаби-Яу и $N = (2, 2)$ суперсимметричными линейными калибровочными сигма-моделями на сфере (КЛСМ). Эта связь устанавливается для многообразий Калаби-Яу типа Берглунда-Хубша. Глава основана на результатах работы [III].

В **разделе 3.1** обсуждается задача вычисления специальной кэлеровой геометрии на пространствах модулей $M_C(X)$ и $M_K(X)$ многообразий Калаби-Яу X .

Методика расчёта этой метрики на пространстве модулей комплексных структур $M_C(X)$ для многообразий Калаби-Яу, заданных в виде гиперповерхностей во взвешенных проективных пространствах и допускающих полиномиальные деформации, была разработана А.А. Белавиным и К.Р. Алешкиным в работе [21]. Что касается вычисления специальной геометрии на пространстве модулей кэлеровых структур $M_K(X)$, ключевой подход основывается на гипотезе зеркальной симметрии. Действительно, ведь наличие зеркального двойника Y , в частности, предполагает изоморфизм $M_K(X) \simeq M_C(Y)$.

В **разделе 3.2** вводится $N = (2, 2)$ суперсимметричная линейная калибровочная сигма-модель на сфере. Представлен обзор результатов точного вычисления статистической суммы. Рассмотрен альтернативный метод нахождения специальной кэлеровой геометрии на $M_K(Y)$, который был предложен в работе [16]. Х. Джокерс и его соавторы выдвинули гипотезу, связывающую кэлеров потенциал K_K^Y на пространстве модулей кэлеровых структур многообразия Калаби-Яу Y с статистической суммой Z_Y некоторой $N = (2, 2)$ суперсимметричной калибровочной линейной сигма-модели (КЛСМ), для которой Y является пространством вакуумов. Данная гипотеза постулирует

следующее равенство (далее — JKLMR-гипотеза):

$$e^{-K_K^Y} = Z_Y. \quad (20)$$

Статсумма Z_Y модели была вычислена аналитически с помощью техники суперсимметричной локализации [14, 15]. Окончательное выражение для Z_Y было представлено в виде контурного интеграла:

$$Z_Y = \sum_{\vec{m} \in \Lambda} \prod_{l=1}^h \int_{\mathcal{C}_\uparrow} \frac{d\tau_l}{(2\pi i)} \left(z_l^{-(\tau_l - \frac{m_l}{2})} \bar{z}_l^{-(\tau_l + \frac{m_l}{2})} \right) \prod_{a=1}^{h+5} \frac{\Gamma\left(\frac{q_a}{2} + \sum_{l=1}^h Q_{la} \left(\tau_l - \frac{m_l}{2}\right)\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{q_a}{2} - \sum_{l=1}^h Q_{la} \left(\tau_l + \frac{m_l}{2}\right)\right)}. \quad (21)$$

Контур интегрирования $\mathcal{C}_\uparrow$ идет вдоль мнимой оси. q_a обозначают R-заряды, Q_{la} — заряды калибровочной группы $U(1)^h$, $l = 1, \dots, h$, $a = 1, \dots, h+5$. Здесь введено обозначение $z_l = e^{-(2\pi r_l + i\theta_l)}$, где r_l, θ_l — параметры Файе–Илиопулоса и тета-углы. Множество суммирования $\vec{m} = \{m_1, \dots, m_h\} \in \Lambda$ определяется условием:

$$m_l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad m_l Q_{la} \in \mathbb{Z}. \quad (22)$$

Из зеркальной симметрии следует совпадение кэлеровых потенциалов:

$$K_K^Y = K_C^X. \quad (23)$$

Тогда гипотезу (20) можно переформулировать в зеркальной форме

$$e^{-K_C^X} = Z_Y. \quad (24)$$

Связь между Калаби–Яу и КЛСМ, также как и справедливость гипотезы (24) была установлена для Квинтики [22], для Калиби–Яу типа Ферма, имеющих только полиномиальные деформации [23], а также для ряда примеров многообразий, не относящихся к классу Ферма [IV], [24].

Однако, в работе [25] было замечено, что в остальных случаях, когда Калаби–Яу X имеет смешанный тип, то есть состоит и мономов типа Ферма, цепь или петля, JKLMR-гипотеза (24) не выполнена. Дело в том, что при вычислении статсуммы Z_Y могут возникать лишние слагаемые (так называемая проблема лишних полюсов), и в правой части формулы (24) появятся

дополнительные члены. Об этом смотрите также в [26].

В разделе 3.3 рассматривается конструкция множественных зеркал для семейств многообразий Калаби-Яу, определяемых во взвешенных проективных пространствах.

В разделе 3.4 явным вычислением проверяется [III] зеркальная версия гипотезы Джокерса и соавторов (21) для случая, когда Калаби-Яу X представляет собой зеркало некоторого семейства орбифолдов Калаби-Яу Y , лежащих во взвешенном проективном пространстве $\bar{\mathbb{P}}_k^4$. При этом X не обязательно принадлежит к классу Ферма. Пространство $\bar{\mathbb{P}}_k^4$, в свою очередь, допускает наличие в нем двух различных полиномов $W_{Y(1)}$ типа Ферма, и $W_{Y(2)}$ смешанного типа (цепь и Ферма), задающих орбифолды Калаби-Яу $Y(1)$ и $Y(2)$. При этом их зеркала $X(1)$ и $X(2)$, построенные по конструкции Берглунда-Хубша-Кравица [8, 27], лежат в разных взвешенных проективных пространствах $\mathbb{P}_k^4(1)$ и $\mathbb{P}_k^4(2)$. Однако, их периоды голоморфной формы Ω и Кэлеровы потенциалы пространства модулей комплексных структур совпадают [28]

$$K_C^{X(1)} = K_C^{X(2)}. \quad (25)$$

Соотношение (25) гарантирует нам выполнение JKLMR-гипотезы для Калаби-Яу $X(2)$ более общего класса. Действительно, ведь Калаби-Яу $X(1)$ имеет тип Ферма, и для него гипотеза была проверена [24], то есть выполняется равенство

$$e^{-K_C^{X(1)}} = Z_{Y(1)}. \quad (26)$$

Тогда, вычислив явно контурные интегралы в статсумме (21) и используя формулу (25), мы проверяем JKLMR-гипотезу в виде

$$e^{-K_C^{X(2)}} = Z_{Y(2)}. \quad (27)$$

Последнее равенство является проверкой зеркальной версии гипотезы для неферма Калаби-Яу $X(2)$. На самом деле вычисление статсуммы Z_Y проведено в достаточно общем случае, но при некоторых ограничениях на многочлен, определяющий X . Эти ограничения выполнены в описанном выше случае.

В разделе 3.5 приведены примеры выполнения гипотезы.

В главе 4 строятся $N = 2$ суперконформные теории поля с централь-

ным зарядом, равным 9. Рассмотрен специальный класс таких теорий, которые представляют собой орбифолды произведений $N = 2$ минимальных моделей типа ADE.

В разделе 4.1 представлены основные определения и свойства двумерных конформных теорий поля. Кратко обсуждены представления алгебры Вирасоро.

В разделе 4.2 введено $N = 2$ суперсимметричное расширение алгебры Вирасоро. Определены киральные поля, показано, что множество киральных полей образует кольцо относительно операторного произведения.

В разделе 4.3 описываются минимальные, унитарные модели $N = 2$ супералгебры Вирасоро. Они нумеруются целым неотрицательным числом k и имеют центральный заряд:

$$c = \frac{3k}{k+2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (28)$$

Поля в модели строятся из голоморфных и антиголоморфных минимальных представлений $N = 2$ супералгебры Вирасоро. Для данного k существует конечное число таких представлений. Они определяются примарными состояниями (старшими векторами в представлении) Φ_q^l с параметрами $l = 0, \dots, k$ и $q = -l, -l+2, \dots, l$. В секторе Невьё-Шварца примарные состояния Φ_q^l имеют конформную размерность и $U(1)$ заряд:

$$\Delta_{l,q}^{NS} = \frac{l(l+2) - q^2}{4(k+2)}, \quad Q_{l,q}^{NS} = \frac{q}{k+2}. \quad (29)$$

Важную роль играют киральные и антикиральные примарные состояния. В дополнение к тому, что, будучи примарными, они аннулируются положительной подалгеброй Вирасоро, они также удовлетворяют условиям $G_{-1/2}^+ \Phi_c^l = 0$ и $G_{-1/2}^- \Phi_a^l = 0$. Они возникают в НШ-секторе при $q = \pm l$:

$$\Phi_c^l \equiv \Phi_l^l, \quad \Phi_a^l \equiv \Phi_{-l}^l. \quad (30)$$

Спаривая голоморфные и антиголоморфные киральные и антикиральные состояния, можно получить так называемые киральные-киральные, антикиральные-киральные, киральные-антикиральные и антикиральные-антикиральные поля. Мы будем их обозначать (с,с), (а,с), (с,а) и (а,а) соответственно. Эти поля образуют киральные кольца, которые имеют важную

геометрическую интерпретацию [11].

В **разделе 4.4** рассматривается модулярный бутстрап как способ нахождения спектра моделей конформной теории поля.

В **разделе 4.5** введены характеры представлений алгебры $N = 2$ Ви-расоро, порождённых примарными состояниями. Обсуждаются свойства характеров и модулярные преобразования.

В **разделе 4.6** сформулирована ADE классификация модулярно-инвариантных статистических сумм $N = 2$ минимальных моделей. Рассмотрен пример минимальной модели E_7 , выписан спектр примарных полей.

В **разделе 4.7** рассматриваются орбифолды произведений $N = (2, 2)$ минимальных моделей супералгебры Вирасоро:

$$M_{\vec{k}}/G_{\text{adm}} = \prod_{i=1}^r M_{k_i}/G_{\text{adm}}, \quad \sum_{i=1}^r \frac{3k_i}{k_i + 2} = 9. \quad (31)$$

Для определения пространства состояний в составной модели, достаточно рассмотреть произведение полей из каждой копии M_{k_i} , принадлежащих одному и тому же сектору (Невьё-Шварца или Рамона). Например, примарные поля определяются как

$$\Psi_{\vec{q}}^{\vec{l}, \vec{\bar{l}}}(z, \bar{z}) = \prod_i \Phi_{q_i}^{l_i}(z) \bar{\Phi}_{q_i}^{\bar{l}_i}(\bar{z}), \quad (32)$$

где левые и правые числа $l_i, \bar{l}_i$ связаны согласно ADE классификации.

Орбифолд определяется по допустимой группе G_{adm} [7, 8]. Это подгруппа в группе полной абелевой симметрии композитной модели $M_{\vec{k}}$:

$$G_{\text{tot}} = \prod_{i=1}^r G_i = \left\{ \prod_i \hat{g}_i^{w_i}, w_i \in \mathbb{Z}, \hat{g}_i = \exp(i2\pi J_{(i),0}) \right\}. \quad (33)$$

Исследована зависимость группы G_{tot} от конкретного модулярного инварианта в каждой копии M_{k_i} .

Естественным образом возникает и условие на *допустимую группу* модели орбифолда:

$$G_{\text{adm}} = \left\{ \vec{w} = (w_1, \dots, w_r) \left| \begin{array}{l} w_i \in G_i, \\ \sum_i \frac{w_i}{k_i + 2} \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \right\}. \quad (34)$$

Ограничение $\sum_i^r \frac{w_i}{k_i+2} \in \mathbb{Z}$, которое определяет допустимую группу, есть ничто иное, как условие того, что голоморфные токи, имеющие заряды $(3, 0)$ и $(0, 3)$ остаются взаимно локальными с остальными полями орбифолда. Эти токи отождествляются с голоморфными и антиголоморфными нигде неисчезающими $(3, 0)$ и $(0, 3)$ формами на гиперповерхности Калаби-Яу.

В разделе 4.8 описывается техника построения *твистованных* состояний в минимальной модели M_k . Для этого понадобится конструкция построения примарных состояний при помощи спектрального потока [29–31].

Спектральный поток возникает как автоморфизм $N = 2$ супералгебры Виасоро [32]:

$$\begin{aligned}\tilde{G}_r^\pm &= U^{-t} G_r^\pm U^t = G_{r \pm t}^\pm, \\ \tilde{J}_n &= U^{-t} J_n U^t = J_n + \frac{c}{3} t \delta_{n,0}, \\ \tilde{L}_n &= U^{-t} L_n U^t = L_n + t J_n + \frac{c}{6} t^2 \delta_{n,0}.\end{aligned}\tag{35}$$

При значениях $t \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ спектральный поток отображает секторы Невьё-Шварца и Рамона друг в друга. Для $t \in \mathbb{Z}$ он действует внутри НШ или Р секторов.

Расширение действия оператора спектрального потока на состояния порождает так называемые твистованные представления. Примарное состояние Φ_q^l оказывается изоморфно

$$V_t^l = (U G_{-\frac{1}{2}}^-)^t \Phi_c^l, \quad 0 \leq t \leq l.\tag{36}$$

при $q = l - 2t$. Для нашей конструкции нам необходимо расширить область допустимых параметров t . А именно, состояние

$$V_t^l = (U G_{-\frac{1}{2}}^-)^{t-l-1} U (U G_{-\frac{1}{2}}^-)^l \Phi_c^l, \quad l+1 \leq t \leq k+1\tag{37}$$

дает реализацию спектральным потоком примарного состояния в секторе Невьё-Шварца: $\Phi_{\tilde{q}}^{\tilde{l}}$, где $\tilde{l} = k - l$, $\tilde{q} = k + 2 + l - 2t$. Справедливость формул (36), (37) следует из структуры сингулярных векторов в представлении супералгебры Виасоро.

В разделе 4.9 строятся примарные поля в модели орбифолда

$$\prod_{i=1}^r M_{k_i}/G_{\text{adm}}. \quad (38)$$

В НШ секторе твистованное примарное поле имеет следующий вид [33]

$$\Psi_{\vec{t}+\vec{w}, \vec{t}}^{\vec{l}, \vec{l}}(z, \bar{z}) = V_{\vec{t}+\vec{w}}^{\vec{l}}(z) \bar{V}_{\vec{t}}^{\vec{l}}(\bar{z}), \quad (39)$$

где

$$\bar{V}_{\vec{t}}^{\vec{l}}(\bar{z}) = \prod_i^r \bar{V}_{\vec{t}_i}^{\vec{l}_i}(\bar{z}), \quad V_{\vec{t}+\vec{w}}^{\vec{l}}(z) = \prod_{i=1}^r V_{\vec{t}_i+\vec{w}_i}^{l_i}(z). \quad (40)$$

Состояния $V_{\vec{t}_i+\vec{w}_i}^{l_i}(z)$ и $\bar{V}_{\vec{t}_i}^{\vec{l}_i}(\bar{z})$ в каждой минимальной модели M_{k_i} определяются согласно формулам (36) и (37).

Следующий шаг — потребовать взаимную локальность полей (39). Условие локальности операторного разложения двух полей

$$\Psi_{\vec{t}_1+\vec{w}_1, \vec{t}_1}^{\vec{l}_1, \vec{l}_1}(z, \bar{z}), \quad \Psi_{\vec{t}_2+\vec{w}_2, \vec{t}_2}^{\vec{l}_2, \vec{l}_2}(0, 0) \quad (41)$$

дает нам следующие уравнения [33]:

$$\sum_{i=1}^r \frac{w_{1i}(q_{2i} - w_{2i}) + w_{2i}(q_{1i} - w_{1i})}{k_i + 2} \in \mathbb{Z}. \quad (42)$$

Раздел 4.10 посвящён анализу конструкции спектрального потока для зеркального орбифолда [34, 35]. Это позволит упростить уравнения взаимной локальности (42).

Рассматривается зеркальная версия формул (39), где зеркальный спектральный поток стартует с антикирального примарного поля. Анализ показывает, что единственное отличие в построении полей состоит в том, что поле $\Psi_{\vec{t}+\vec{w}^*, \vec{t}}^{\vec{l}, \vec{l}}(z, \bar{z})$ оказывается твистованным элементом другой группы

$$\vec{w}^* = \vec{q} - \vec{w} \in G_{\text{adm}}^*. \quad (43)$$

Ясно, что группа G_{adm}^* также является допустимой, так как примарные поля, соответствующие дифференциальным формам веса (3, 0) и (0, 3) на многооб-

разии Калаби-Яу находятся среди взаимно локальных полей. Это позволяет определить спектр в модели орбифолда, которая построена по другой группе:

$$\Psi_{\vec{t}+\vec{w}^*, \vec{t}}^{\vec{l}, \vec{l}}(z, \bar{z}) \in M_{\vec{k}}/G_{\text{adm}}^*. \quad (44)$$

Эта модель орбифолда изоморфна модели $M_{\vec{k}}/G_{\text{adm}}$ по построению. Взаимно локальные поля в модели $M_{\vec{k}}/G_{\text{adm}}$ нумеруются элементами двойственной группы $\vec{w}^* = \vec{q} - \vec{w} \in G_{\text{adm}}^*$ и наоборот [33].

Уравнения взаимной локальности (42) упрощаются:

$$\sum_{i=1}^r \frac{w_i w_i^*}{k_i + 2} \in \mathbb{Z}, \quad \vec{w} \in G_{\text{adm}}, \quad \vec{w}^* \in G_{\text{adm}}^*. \quad (45)$$

Эти уравнения, а также конструкция локальных полей во взаимно-дуальных моделях орбифолда $M_{\vec{k}}/G_{\text{adm}}$ и $M_{\vec{k}}/G_{\text{adm}}^*$, согласованы с инвариантами типа **D** и **E**. Их решения определяют допустимый набор зарядов $\vec{q} = \vec{w} + \vec{w}^*$.

В **разделе 4.11** установлена зеркальная симметрия между исходной и двойственной моделями

$$\prod_{i=1}^r M_{k_i}/G_{\text{adm}} \quad \leftrightarrow \quad \prod_{i=1}^r M_{k_i}/G_{\text{adm}}^*, \quad (46)$$

а также доказан изоморфизм их киральных колец.

В **разделе 4.12** конструкция построения взаимно локальных полей продемонстрирована на примере модели $(1_A)^1(16_E)^3$.

В **главе 5 (заключении)** сформулированы основные результаты диссертации, выносимые на защиту.

В **приложении А** доказано правило отражения для характеров $N = 2$ минимальных моделей.

В **приложении В** проверена взаимная локальность примарных полей из спектра $N = 2$ минимальной модели типа ADE.

Список литературы

- [1] Green Michael B., Schwarz John H. Anomaly Cancellation in Supersymmetric D=10 Gauge Theory and Superstring Theory // Phys. Lett. B. — 1984. — Vol. 149. — P. 117–122. DOI: 10.1016/0370-2693(84)91565-X.
- [2] Vacuum configurations for superstrings / P. Candelas [et al.] // Nucl. Phys. B. — 1985. — Vol. 258. — P. 46–74. DOI: 10.1016/0550-3213(85)90602-9.
- [3] A Pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory / Philip Candelas [et al.] // Nucl. Phys. B. — 1991. — Vol. 359. — P. 21–74. DOI: 10.1016/0550-3213(91)90292-6.
- [4] An Exactly soluble superconformal theory from a mirror pair of Calabi-Yau manifolds / Philip Candelas [et al.] // Phys. Lett. B. — 1991. — Vol. 258. — P. 118–126. DOI: 10.1016/0370-2693(91)91218-K.
- [5] Mirror symmetry for two parameter models. 1. / Philip Candelas [et al.] // Nucl. Phys. B. — 1994. — Vol. 416. — P. 481–538. — hep-th/9308083.
- [6] Batyrev Victor V. Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties // J. Alg. Geom. — 1994. — Vol. 3. — P. 493–545. — alg-geom/9310003.
- [7] Berglund Per, Hubsch Tristan. A Generalized construction of mirror manifolds // Nucl. Phys. B. — 1993. — Vol. 393. — P. 377–391. — hep-th/9201014.
- [8] Krawitz Marc. FJRW rings and Landau-Ginzburg Mirror Symmetry. — 2009. — arXiv:0906.0796 [math.AG].
- [9] Strominger Andrew. SPECIAL GEOMETRY // Commun. Math. Phys. — 1990. — Vol. 133. — P. 163–180. DOI: 10.1007/BF02096559.
- [10] Gepner Doron. Exactly Solvable String Compactifications on Manifolds of SU(N) Holonomy // Phys. Lett. B. — 1987. — Vol. 199. — P. 380–388. DOI: 10.1016/0370-2693(87)90938-5.

- [11] Lerche Wolfgang, Vafa Cumrun, Warner Nicholas P. Chiral Rings in $N=2$ Superconformal Theories // Nucl. Phys. B. — 1989. — Vol. 324. — P. 427–474. DOI: 10.1016/0550-3213(89)90474-4.
- [12] Belavin A. A., Polyakov Alexander M., Zamolodchikov A. B. Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory // Nucl. Phys. B. — 1984. — Vol. 241. — P. 333–380. DOI: 10.1016/0550-3213(84)90052-X.
- [13] Gepner Doron. Yukawa Couplings for Calabi-yau String Compactification // Nucl. Phys. B. — 1988. — Vol. 311. — P. 191–204. DOI: 10.1016/0550-3213(88)90147-2.
- [14] Benini Francesco, Cremonesi Stefano. Partition Functions of $\mathcal{N} = (2, 2)$ Gauge Theories on S^2 and Vortices // Commun. Math. Phys. — 2015. — Vol. 334, no. 3. — P. 1483–1527. — 1206.2356.
- [15] Exact Results in $D=2$ Supersymmetric Gauge Theories / Nima Doroud [et al.] // JHEP. — 2013. — Vol. 05. — 093 P. — 1206.2606.
- [16] Two-Sphere Partition Functions and Gromov-Witten Invariants / Hans Jockers [et al.] // Commun. Math. Phys. — 2014. — Vol. 325. — P. 1139–1170. — 1208.6244.
- [17] Polyakov Alexander M. Quantum Geometry of Fermionic Strings // Phys. Lett. B. — 1981. — Vol. 103. — P. 211–213. DOI: 10.1016/0370-2693(81)90744-9.
- [18] Gliozzi F., Scherk Joel, Olive David I. Supersymmetry, Supergravity Theories and the Dual Spinor Model // Nucl. Phys. B. — 1977. — Vol. 122. — P. 253–290. DOI: 10.1016/0550-3213(77)90206-1.
- [19] Kreuzer Maximilian, Skarke Harald. On the classification of quasihomogeneous functions // Commun. Math. Phys. — 1992. — Vol. 150. — 137 P. — hep-th/9202039.
- [20] Mirror symmetry / K. Hori [et al.]. — Providence, USA : AMS, 2003. — Vol. 1 of Clay mathematics monographs.

- [21] Aleshkin Konstantin, Belavin Alexander. A new approach for computing the geometry of the moduli spaces for a Calabi–Yau manifold // J. Phys. A. — 2018. — Vol. 51, no. 5. — 055403 P. — 1706.05342.
- [22] Aleshkin Konstantin, Belavin Alexander, Litvinov Alexey. JKLMR conjecture and Batyrev construction. — 2018. — 12. — 1812.00478.
- [23] Aleshkin Konstantin, Belavin Alexander. Exact Computation of the Special Geometry for Calabi–Yau Hypersurfaces of Fermat Type // JETP Lett. — 2018. — Vol. 108, no. 10. — P. 705–709. — 1806.02772.
- [24] Aleshkin Konstantin, Belavin Alexander. GLSM for Calabi-Yau Manifolds of Berglund-Hubsch Type // Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 2019. — Vol. 110, no. 11. — 727 P. — 1911.11678.
- [25] Artem'ev A. A., Kochergin I. V. On the Calculation of the Special Geometry for a Calabi–Yau Loop Manifold and Two Constructions of the Mirror Manifold // JETP Lett. — 2020. — Vol. 112, no. 5. — P. 263–268. DOI: 10.1134/S0021364020170051.
- [26] Kochergin I. V. Calabi-Yau manifolds in weighted projective spaces and their mirror gauged linear sigma models // Phys. Rev. D. — 2022. — Vol. 105, no. 6. — 066008 P. — 2112.06335.
- [27] Kelly Tyler L. Berglund–Hübsch–Krawitz mirrors via Shioda maps // Adv. Theor. Math. Phys. — 2013. — Vol. 17, no. 6. — P. 1425–1449. DOI: 10.4310/ATMP.2013.v17.n6.a8.
- [28] Belavin Alexander, Belavin Vladimir, Koshevoy Gleb. Periods of the multiple Berglund–Hübsch–Krawitz mirrors // Lett. Math. Phys. — 2021. — Vol. 111, no. 4. — 93 P. — 2012.03320.
- [29] Belavin A.A., Parkhomenko S.E. Explicit construction of N=2 Superconformal Orbifolds // Theor. Math. Phys. — 2021. — Vol. 209:1.
- [30] Belavin Alexander, Belavin Vladimir, Parkhomenko Sergey. Explicit construction of N=2 SCFT orbifold models. Spectral flow and mutual locality // Nucl. Phys. B. — 2022. — Vol. 982. — 115891 P. — 2206.03472.

- [31] Belavin Alexander, Parkhomenko Sergey. Mirror symmetry and new approach to constructing orbifolds of Gepner models // Nucl. Phys. B. — 2024. — Vol. 998. — 116431 P. — 2311.15403.
- [32] Schwimmer A., Seiberg N. Comments on the $N=2$, $N=3$, $N=4$ Superconformal Algebras in Two-Dimensions // Phys. Lett. B. — 1987. — Vol. 184. — P. 191–196. DOI: 10.1016/0370-2693(87)90566-1.
- [33] Eremin Boris, Parkhomenko Sergej. Explicit construction of states in orbifolds of products of $N = 2$ Superconformal ADE Minimal models. — 2025. — 6. — arXiv:2506.21992.
- [34] Parkhomenko Sergej. Conformal bootstrap and mirror symmetry of states in Gepner models // JHEP. — 2024. — Vol. 11. — 104 P. — 2407.07555.
- [35] Parkhomenko Sergej. Spectral flow construction of mirror pairs of CY orbifolds // Nucl. Phys. B. — 2022. — Vol. 985. — 116005 P. — 2208.11612.