

На правах рукописи

Степанов Николай Анатольевич

**ФЛУКТУАЦИОННАЯ ПРОВОДИМОСТЬ И
ПЛОТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ В
НИЗКОРАЗМЕРНЫХ
СВЕРХПРОВОДНИКАХ**

Специальность 01.04.02 —
«Теоретическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2020

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Незатухающий интерес к исследованию неупорядоченных и неоднородных сверхпроводников обусловлен, с одной стороны, возможностью изучения таких фундаментальных физических явлений, как переход сверхпроводник-изолятор [1] и когерентное проскальзывание фазы [2], а с другой стороны, их важными практическими применениями. Среди последних стоит выделить однофотонные детекторы на сверхпроводящих пленках [3; 4], для которых важно использование сверхпроводников с большой величиной кинетической индуктивности, что останавливает выбор на сильно неупорядоченных сверхпроводниках. Также на основе сверхпроводящих пленок строится современная квантовая электроника, к примеру, защищенные кубиты [5].

Хорошо известно, что наличие беспорядка приводит к усилению флуктуационных эффектов, что становится особенно существенно в низкоразмерных системах [6]. Учет флуктуаций требует выхода за рамки стандартного приближения среднего поля. В ряде случаев, например, когда речь идет о сверхпроводящих флуктуационных эффектах выше линии перехода, для описания флуктуаций достаточно ограничиться низшим порядком теории возмущений. В случае же неоднородных квазиодномерных сверхпроводников в настоящий момент в принципе отсутствует способ их теоретического описания.

Выведенное в диссертации общее выражение для флуктуационной поправки к проводимости сверхпроводников при произвольных температурах выше критической и произвольной силе примесного рассеяния, в некотором роде, завершает построение теории флуктуационной сверхпроводимости. Наличие единой формулы позволяет как критически проанализировать имеющиеся в литературе результаты, полученные в разных областях параметров, так и впервые исследовать область высоких температур в чистом случае.

Изучение размытия плотности состояний в неоднородных сверхпроводящих проволоках привело к разработке концептуально нового математического метода для анализа класса стохастических дифференциальных уравнений с условием невыхода из заданной полосы, основанного на суперсимметричном функциональном представлении Паризи и Сурла [7; 8] в сочетании с трансфер-матричным подходом Ефетова и Ларкина [9]. Данный метод подробно разобран на простейшем примере стохастической задачи Уитни о баланси-

ровке перевернутого математического маятника под действием случайной горизонтальной силы. В то время, как существование непадающей траектории в задаче Уитни обсуждается в математической литературе на протяжении 80 лет [10–13], вопрос о ее единственности и описании ее статистических свойств в случае стохастической накачки в настоящей диссертационной работе поставлен впервые. Разработанный формализм дает исчерпывающий ответ на поставленный вопрос.

Целью диссертационной работы является исследование влияния сверхпроводящих флуктуаций на проводимость в нормальном состоянии и разработка теоретического описания неоднородного сверхпроводящего состояния в квазиодномерных системах.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Вычислить поправку к проводимости металла от флуктуационных куперовских пар при произвольной силе беспорядка при произвольной температуре.
2. Разработать непertурбативный подход к описанию плотности состояний в неоднородных сверхпроводящих проволоках с неоднородным параметром порядка.
3. Опробовать новый метод на более простой системе со схожей математической структурой. В качестве примера была выбрана задача о стохастическом перевернутом маятнике.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Получено общее выражение для флуктуационной проводимости при произвольной силе потенциального беспорядка и произвольной температуре в любой размерности, учитывающее три стандартных вклада: вклад от флуктуационных куперовских пар, вклад от рассеяния электронов на флуктуационных парах и вклад от подавления плотности нормальных электронов.
2. Общее выражение исследовано в двумерной геометрии в разных асимптотических режимах. На его основе был проведен критический анализ предыдущих результатов.

3. Разработан теоретико-полевой суперсимметричный подход к описанию особого единственного решения стохастических дифференциальных уравнений, который был применен к задаче о балансировке стохастического перевернутого маятника. Вычислена функция распределения угла и скорости на никогда не падающей траектории.
4. Предложенный суперсимметричный подход обобщен на конечные интервалы времени. Вычислены разновременные корреляционные функции и ляпуновская экспонента в задаче о стохастическом перевернутом маятнике.
5. Разработанный в диссертации суперсимметричный метод обобщен на случай уравнения Узаделя с флуктуирующим в пространстве параметром порядка. Выведена система уравнений, необходимая для описания статистики плотности состояний в неупорядоченных сверхпроводниках.

Научная новизна:

1. Впервые вычислена флуктуационная поправка к проводимости во всей области температур и сил примесного рассеяния.
2. Разработан принципиально новый метод, позволяющей описать статистику не падающей траектории в стохастической задаче Уитни.
3. Заложены основы теории неоднородных квазиодномерных сверхпроводников.

Практическая значимость Результаты, представленные в первой части диссертации, систематизирует знание о флуктуационных поправках, закрывают многие предыдущие результаты, что позволяют более аккуратно анализировать экспериментальные данные по флуктуационной сверхпроводимости. Разработанный во второй части диссертации метод позволяет описывать статистические свойства решений широкого класса стохастических дифференциальных уравнений с условием невыхода из полосы.

Достоверность полученных результатов обеспечивается, во-первых, надежностью применявшихся теоретических подходов, во-вторых, подтверждением численными методами и, в-третьих, согласием с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались на следующих семинарах и конференциях:

- Winter workshop/school on localization, interactions and superconductivity, ИТФ им. Л.Д. Ландау, 19-22 декабря 2016, Черногловка. Доклад: "*Fluctuation superconductivity: from the dirty to the clean case*".
- The Challenge of 2-Dimensional Superconductivity, Lorentz Center, 8-12 июня 2019, Лейден. Постер: "*Fluctuation superconductivity: from the dirty to the clean case*".
- Landau Days 2020, ИТФ им. Л.Д. Ландау, 22-25 июня 2020, Черногловка. Доклад: "*Inverted pendulum driven by a horizontal random force: statistics of the non-falling trajectory and supersymmetry*".
- Ученый совет ИТФ им. Л.Д. Ландау, 4 сентября 2020, Черногловка. Доклад: "*Lyapunov exponent for Whitney's problem with random drive*".

Личный вклад. Над задачами, представленными в диссертациями, автор работал в сотрудничестве с научным руководителем д.ф.-м.н. Скворцовым М.А. Все результаты были получены либо автором, либо при непосредственном личном участии.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в следующих работах:

1. *Stepanov N. A., Skvortsov M. A.* Superconducting fluctuations at arbitrary disorder strength // Phys. Rev. B. — 2018. — т. 97, вып. 14. — с. 144517.
2. *Степанов Н. А., Скворцов М. А.* Ляпуновская экспонента в задаче Уитни со случайной накачкой // Письма в ЖЭТФ. — 2020. — т. 112, вып. 16. — с. 394–400.
3. *Stepanov N. A., Skvortsov M. A.* Inverted pendulum driven by a horizontal random force: statistics of the never-falling trajectory and supersymmetry // arXiv:2006.13819. — 2020.

Работы изданы в 2 печатных изданиях, 2 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК.

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

В первой главе построена теория флуктуационной проводимости сверхпроводников при произвольной температуре $T > T_c$ и силе беспорядка, измеряемой параметром $T_c\tau$ (τ — время примесного рассеяния).

Основы описания влияния близости к сверхпроводящему переходу на транспорт в нормальном состоянии были заложены Асламазовым и Ларкиным в пионерской работе 1968 г. [14], где была вычислена парапроводимость — прямой вклад флуктуационных куперовских пар в проводимость. В дальнейшем теория последовательно развивалась. В первую очередь, были обнаружены новые процессы, которые, помимо парапроводимости, обеспечивают влияние флуктуационно рождающихся куперовских пар на электронный транспорт [6; 15; 16]. Построенная в начале 1970-х гг. теория описывала непосредственную окрестность критической температуры, при этом рассмотрение ограничивалось случаем грязных сверхпроводников, $T\tau \ll 1$ (кроме парапроводимости, которая в ведущем порядке оказалась нечувствительной к беспорядку), см. область (а) на Рис. 1.

В 1980-е годы теория флуктуационной проводимости в грязном пределе была распространена на большие температуры выше T_c [область (b)] [17; 18]. Появление высокотемпературной сверхпроводимости в 1990-е годы стимулировало интерес к менее разупорядоченным сверхпроводникам, что потребовало обобщения теории на чистый случай, $T\tau \gg 1$, в окрестности T_c [область (c)] [19—22]. Флуктуационная проводимость сверхпроводника без примесей была рассмотрена в работе [23]. Развитие теории сверхпроводящих флуктуаций в 2000-е гг. было связано с учетом влияния магнитного поля и вычислением флуктуационной проводимости выше линии $H_{c2}(T)$ при низкой температуре в грязном пределе [24].

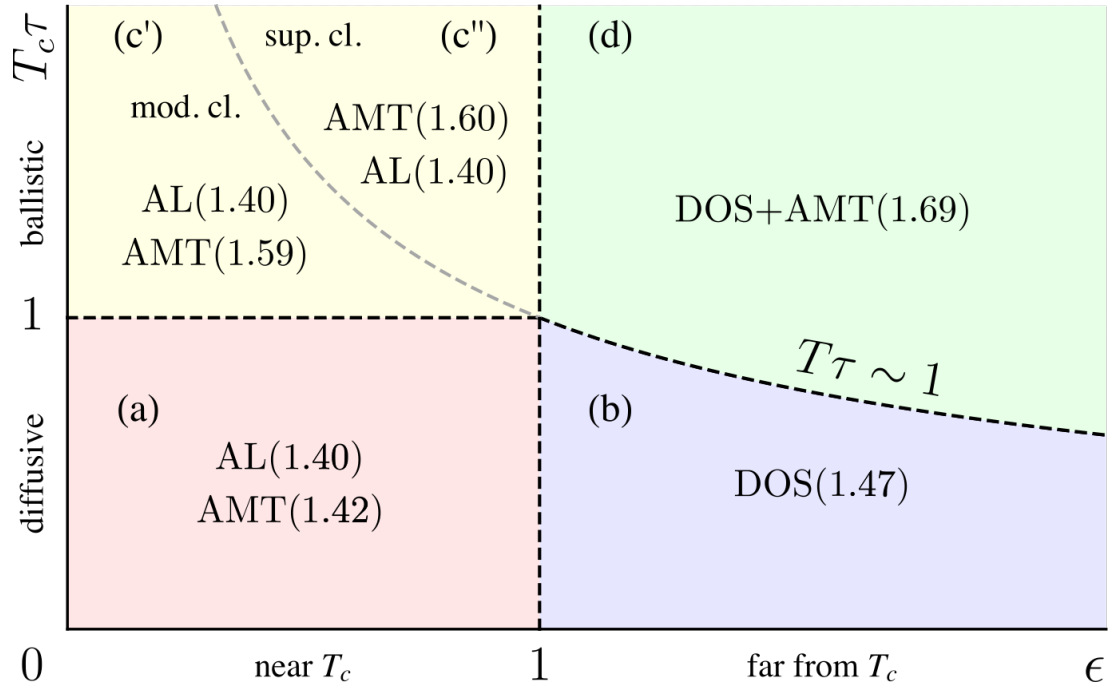


Рис. 1 — Фазовая диаграмма для флуктуационной проводимости в переменных $\epsilon = \ln T/T_c$ (приведенная температура) и $T_c\tau$ (обратная сила беспорядка). В разных асимптотических областях указаны ведущие вклады в проводимость, описываемые соответствующими выражениями из диссертационной работы.

Наметившаяся в 2010-х гг. тенденция состоит в стремлении к выводу максимально общих формул для флуктуационных поправок как функции нескольких управляющих параметров. В работах [25; 26] была изучена поправка к проводимости во всей области температур и магнитных полей выше кривой $H_{c2}(T)$ в грязном пределе. Несколько ранее аналогичные выражения были получены и для флуктуационного эффекта Нернста [27; 28]. При таком подходе естественным образом вскрываются недочеты и ошибки предыдущих работ, изучавших флуктуационные эффекты в отдельной узкой области параметров.

Продолжая данную тенденцию, первая глава диссертации посвящена распространению общих формул в сторону произвольной силы примесного рассеяния. Выведенные формулы позволяют аналитически описать весь кроссовер от грязного к чистому пределу и критически проанализировать результаты работ [20–22], относящихся к чистому пределу, а также впервые исследовать ранее не изучавшуюся баллистическую область вдали от перехода при $T_c\tau \gg 1$ и $T \gg T_c$ [область (d)].

Расчет флуктуационной поправки выполнен в технике Келдыша с учетом стандартных вкладов Асламазова-Ларкина (AL) [14], Маки-Томпсона (MT) [15; 16] и вклада плотности состояний (DOS) [6]. Вычисления проведены в модели гауссового случайного потенциала с коррелятором $\langle U(\mathbf{r})U(\mathbf{r}') \rangle = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/2\pi\nu\tau$ (где ν — плотность состояний на уровне Ферми на одну проекцию спина). При усреднении трех указанных скелетных диаграмм по беспорядку в блоках электронных функций Грина систематически учтены все вклады, возникающие в приближении непересекающихся примесных пунктов, что позволяет выйти за рамки диффузионного приближения. В ходе проведения расчетов было обнаружено, что общепринятая классификация в терминах диаграмм AL, MT и DOS является до некоторой степени искусственной, поскольку эти диаграммы содержат схожие вклады, которые частично сокращают друг друга. Иными словами, хотя физический смысл влияния флуктуаций и сводится к трем известным *эффектам*: парапроводимости, рассеянию на сверхпроводящих флуктуациях и подавлению плотности нормальных электронов, — было бы неверно утверждать, что эти *эффекты* находятся в однозначном соответствии с одноименными *диаграммами*. К схожим выводам пришли авторы работ [26; 29].

Общую формулу для флуктуационной проводимости удобно представить как сумму вкладов с одним и двумя флуктуационными пропагаторами:

$$\delta\sigma = \delta\sigma^{(1)} + \delta\sigma^{(2)}. \quad (1)$$

Член с одним пропагатором, $\delta\sigma^{(1)}$, учитывает диаграммы DOS и MT, а также содержит естественно преобразованную часть диаграммы AL (AL1). Оставшаяся часть поправки AL (AL2) содержит два пропагатора и учитывается в $\delta\sigma^{(2)}$. Выражение для $\delta\sigma^{(1)}$ может быть представлено в следующем виде:

$$\delta\sigma^{(1)} = 2\pi D\tau^2 \int \frac{d\Omega}{2\pi} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left\{ B_\Omega \operatorname{Im} [L^R(\Omega, q)\Sigma^R(\Omega, q)] + B'_\Omega \operatorname{Im} [L^R(\Omega, q)] \Sigma^Z(\Omega, q) \right\}, \quad (2)$$

Вклад с двумя пропагаторами, $\delta\sigma^{(2)}$, удается выразить исключительно в терминах L и его производных:

$$\delta\sigma^{(2)} = \frac{1}{2d} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} B'(\Omega) \times \left[2 (L^R \partial_q [L^R]^{-1} - L^A \partial_q [L^A]^{-1})^2 - L^R L^A (\partial_q [L^R]^{-1} - \partial_q [L^A]^{-1})^2 \right]. \quad (3)$$

В уравнениях (2) и (3) $L(\Omega, q)$ — флуктуационный пропагатор, $\Sigma^{R,Z}(\Omega, q)$ обозначают усредненные по беспорядку блоки электронных функций Грина, а $B_\Omega = \coth(\Omega/2T)$ — бозонная «функция распределения».

Как L , так и Σ выражаются через вспомогательные величины

$$f_m^R(\omega, q) = \left\langle \frac{1}{(1 - i\omega\tau + iqln_x)^m} \right\rangle_{\mathbf{n}}, \quad (4a)$$

$$g_m^R(\omega, q) = \left\langle \frac{in_x}{(1 - i\omega\tau + iqln_x)^m} \right\rangle_{\mathbf{n}}, \quad (4b)$$

где усреднение происходит по единичному d -мерному вектору \mathbf{n} , $l = v_F\tau$ — длина свободного пробега, а v_F — скорость Ферми. Явный вид функций f_m и g_m зависит от размерности пространства. Например, f_1 в 2D и 3D случаях задается следующими выражениями:

$$f_1^R(\omega, q) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{(1 - i\omega\tau)^2 + q^2 l^2}}, & 2D; \\ \frac{\arctan[ql/(1 - i\omega\tau)]}{ql}, & 3D. \end{cases} \quad (5)$$

Как обычно, $f_m^A(\omega, q) = [f_m^R(\omega, q)]^*$ и $g_m^A(\omega, q) = [g_m^R(\omega, q)]^*$.

Запаздывающий флуктуационный пропагатор $L^R(\Omega, q)$ можно записать как сумму по Мацубаровским частотам $\varepsilon_n = 2\pi T(n + 1/2)$:

$$\frac{1}{L^R(\Omega, q)} = \epsilon + 4\pi T \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\varepsilon_n} - \frac{\tau f_1^R(2i\varepsilon_n + \Omega, q)}{1 - f_1^R(2i\varepsilon_n + \Omega, q)} \right], \quad (6)$$

где $\epsilon = \ln(T/T_c)$. Общее выражение для флуктуационного пропагатора (6) является довольно громоздким. Его можно значительно упростить в двух частично перекрывающихся пределах:

- В диффузном пределе ($ql \ll 1$ и $\Omega\tau \ll 1$)

$$\frac{1}{L^R(\Omega, q)} = \epsilon + \psi \left(\frac{1}{2} + \frac{Dq^2 - i\Omega}{4\pi T} \right) - \psi \left(\frac{1}{2} \right), \quad (7)$$

где $\psi(z)$ — дигамма функция.

- Вблизи перехода ($T \rightarrow T_c$) флуктуационный пропагатор принимает так называемую локальную форму при всех значениях $T\tau$:

$$\frac{1}{L^R(\Omega, q)} = \epsilon + \xi^2(T\tau)q^2 - \frac{i\pi}{8T}\Omega, \quad (8)$$

где $\xi(T\tau) = [D\tau \mathcal{F}(1/2)]^{1/2}$ с $\mathcal{F}(z) = \psi(z) + \frac{\psi'(z)}{4\pi T\tau} - \psi\left(z + \frac{1}{4\pi T\tau}\right)$ — зависящая от беспорядка сверхпроводящая длина когерентности, интерполирующая между грязным, $\xi_d^2 = \pi D/8T$, и чистым, $\xi_c^2 = 7\zeta(3)D/16\pi^2\tau T^2$, пределами.

Входящие в уравнение (2) усредненные по беспорядку *электронные блоки* $\Sigma^{R,Z}(\Omega, q)$ выражаются через обобщенный куперон

$$\gamma^R(\omega, q) = \frac{1}{1 - f_1^R(\omega, q)} \quad (9)$$

и введенные в уравнениях (4) функции f_m и g_m следующим образом:

$$\Sigma_{\text{DOS+RMT}}^R(\Omega, q) = \int \frac{dE}{2\pi} F'_E [f_1^A - f_1^A(\gamma^A)^2 - 2f_2^A\gamma^A - 3f_3^A(\gamma^A)^2], \quad (10a)$$

$$\Sigma_{\text{DOS+RMT}}^Z(\Omega, q) = 2 \operatorname{Re} \int \frac{dE}{2\pi} F_E [f_1^A + f_1^A(\gamma^A)^2 - 2f_2^A\gamma^A + f_3^A(\gamma^A)^2], \quad (10b)$$

$$\Sigma_{\text{MT(C)}}^R(\Omega, q) = 2 \int \frac{dE}{2\pi} F'_E [f_1^A g_1^A g_2^A (\gamma^A)^2 + f_1^A (g_2^A)^2 (\gamma^A)^3], \quad (10c)$$

$$\Sigma_{\text{MT(C)}}^Z(\Omega, q) = 4 \operatorname{Re} \int \frac{dE}{2\pi} F_E f_1^A g_1^A g_2^A (\gamma^A)^2, \quad (10d)$$

$$\Sigma_{\text{DOS(C)}}^R(\Omega, q) = \int \frac{dE}{2\pi} F'_E [f_1^A (g_2^A)^2 (\gamma^A)^3 - f_1^A (g_1^A)^2 \gamma^A], \quad (10e)$$

$$\Sigma_{\text{DOS(C)}}^Z(\Omega, q) = -2 \operatorname{Re} \int \frac{dE}{2\pi} F_E [f_1^A (g_2^A)^2 (\gamma^A)^3 + f_1^A (g_1^A)^2 \gamma^A], \quad (10f)$$

$$\Sigma_{\text{AMT}}^Z(\Omega, q) = -4 \operatorname{Re} \int \frac{dE}{2\pi} F_E f_1^A \gamma^R \gamma^A, \quad (10g)$$

$$\Sigma_{\text{AL1}}^R(\Omega, q) = \frac{2}{l} \frac{1}{q^{d-1}} \partial_q \left\{ q^{d-1} \int \frac{dE}{2\pi} F'_E [g_2^A (\gamma^A)^2 + 2g_1^A \gamma^A] \right\}, \quad (10h)$$

где аргументы функций f_m , g_m и γ такие же как и в $f_m(2E - \Omega, q)$, а $\partial_q = \partial/\partial|q|$ — это производная по абсолютному значению импульса. Блоки, отсутствующие в списке (10), оказываются нулевыми: $\Sigma_{\text{AMT}}^R = \Sigma_{\text{AL1}}^Z = 0$. Для регуляризации инфракрасно расходящейся аномальной поправки АМТ в размерностях $d \leq 2$ следует учитывать конечное время сбоя фазы τ_ϕ [15; 16].

Уравнения (1)–(10) описывают статическую флуктуационную проводимость в единицах e^2/\hbar при произвольной температуре $T > T_c$, времени примесного рассеяния электронов τ и размерности пространства d . В диссертации подробно проанализирована двумерная геометрия.

В *диффузном пределе* (грязный случай) при произвольных температурах наши результаты полностью совпадают с результатами работ [26; 29] и расходятся с предсказаниями работы [25].

В *баллистическом пределе* (чистый случай) вблизи перехода [область (с)] общее выражение для флуктуационной поправки может быть представлено в виде суммы вкладов DOS, AL1, AL2 и двух вкладов, происходящих из диаграммы МТ: регулярного MT_{tanh} и сингулярного AMT_{sing} . В ведущем порядке по близости к переходу они даются формулами:

$$\delta\sigma^{\text{DOS}} = \left[-\frac{2\pi^2}{7\zeta(3)}(T\tau)^2 - \frac{2}{\pi}T\tau + \mathcal{O}(1) \right] \ln \frac{1}{\epsilon}, \quad (11a)$$

$$\delta\sigma_{\text{tanh}}^{\text{MT}} = \left[\frac{2\pi^2}{7\zeta(3)}(T\tau)^2 - \frac{2}{\pi}T\tau + \mathcal{O}(1) \right] \ln \frac{1}{\epsilon}, \quad (11b)$$

$$\delta\sigma^{\text{AL1}} = \left[\frac{4}{\pi}T\tau + \mathcal{O}(1) \right] \ln \frac{1}{\epsilon}. \quad (11c)$$

Вклад AL2, как обычно, не зависит от беспорядка:

$$\delta\sigma^{\text{AL2}} = \frac{1}{16\epsilon} + \dots, \quad (12)$$

а определяемый τ_ϕ сингулярный вклад АМТ имеет слегка разный вид в *умеренно чистом* ($\xi_c \ll l \ll \xi_c/\sqrt{\epsilon}$) [область (с')] и *суперчистом* случае ($\xi_c/\sqrt{\epsilon} \ll l$)

[область (с'') на Рис. 1]:

$$\delta\sigma_{\text{sing, mod.cl.}}^{\text{AMT}} \approx \frac{1}{8} \frac{1}{\epsilon - \gamma'} \ln \frac{\epsilon}{\gamma'}, \quad (13a)$$

$$\delta\sigma_{\text{sing, sup.cl.}}^{\text{AMT}} \approx \delta\sigma_{\text{sing, mod.cl.}}^{\text{AMT}} + \frac{\pi T\tau}{\sqrt{14\zeta(3)\epsilon}} \ln \frac{l\sqrt{\epsilon}}{\xi_c}, \quad (13b)$$

где $\gamma'^{-1} = [16\pi^2/7\zeta(3)](T\tau)(T\tau_\phi)$.

Важным результатом диссертационной работы является следующее из уравнений (11) сокращение не только квадратичных $(T\tau)^2$, но и линейных по $T\tau$ членов для вклада $\ln 1/\epsilon$ в окрестности перехода. Данный результат находится в противоречии с выводом работы [21], где утверждалась, что в умеренно чистом пределе баллистическая поправка пропорциональна $(T\tau)^2$. Этот сильно растущий по τ вклад в флуктуационную поправку был приписан диаграмме DOS, в соответствии с нашим результатом (11a). Однако мы видим, что полюсной вклад диаграммы МТ имеет такое же ведущее поведение, но с противоположным знаком [см. (11b)], что приводит к точной компенсации $(T\tau)^2$ -членов. Мы полагаем, что расхождение с работой [21] происходит из-за их неправильной оценки диаграммы МТ. Понимая, что рост поправки $\delta\sigma$ пропорциональный $(T\tau)^2$, является нефизическим, в работе [22] было высказано предположение (и даже некоторым образом численно подтверждено), что такое поведение реализуется только в умеренно чистом случае, в то время как в сверхчистом случае «большой отрицательный вклад DOS может быть сокращен положительным аномальным вкладом МТ». Однако наш анализ показывает, что данное объяснение неверно: сокращение наиболее расходящихся членов происходит уже в умеренно чистом пределе из-за полюсного вклада диаграммы МТ.

Таким образом, в баллистическом пределе в окрестности T_c [область (с)] флуктуационная поправка к проводимости определяется конкуренцией вклада АМТ (13) и вкладом AL2 (12). Первый содержит большой фактор $T\tau$, в то время как последний более сингулярен при $\epsilon \rightarrow 0$.

В ранее не рассматривавшемся в литературе *баллистическом пределе* (чистый случай) вдали от перехода [область (d)] асимптотическое поведение

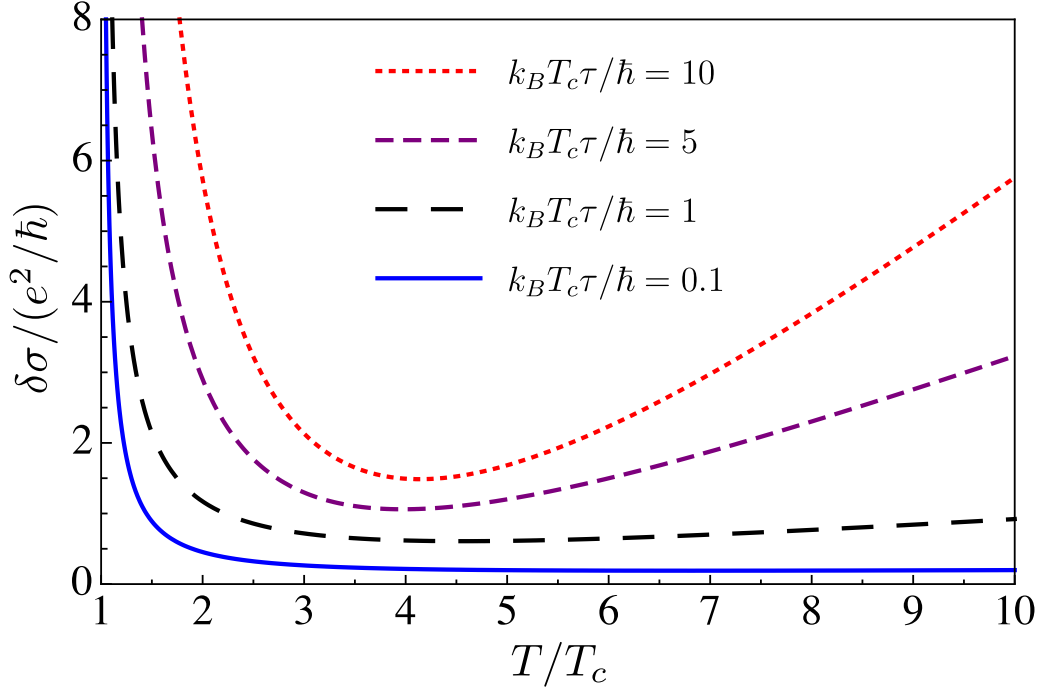


Рис. 2 — Температурная зависимость флуктуационной поправки к проводимости двумерной пленки от куперовского канала. Разные кривые соответствуют различной силе беспорядка, характеризуемой параметром $k_B T_c \tau / \hbar$: 0.1 (диффузионный предел), 1, 5 и 10 (баллистический предел). Время дефазировки принято равным $\tau_\phi = 100\hbar/k_B T_c$ для всех кривых.

флуктуационной поправки имеет вид

$$\delta\sigma = \text{const} + \frac{T\tau}{\pi\epsilon} + 0.190 \frac{T\tau \ln T\tau}{\epsilon^2} + \dots, \quad (14)$$

где первый, не зависящий от температуры член ультрафиолетово расходится и должен быть включен в друдевскую проводимость [30].

Результат (14) не согласуется с результатом работы [23], где флуктуационная проводимость изучалась в абсолютно чистом пределе (без примесей, $\tau = \infty$). Поскольку некоторое количество примесей неизбежно присутствует в реальных образцах, мы считаем, что при расчете проводимости на постоянном токе сначала следует взять предел $\omega \rightarrow 0$ и лишь затем $\tau \rightarrow \infty$, что приводит к нашему выражению (14).

На Рис. 2 представлена температурная зависимость полной флуктуационной поправки к проводимости пленки, полученная численно для различного беспорядка (здесь восстановлены физические единицы). Согласно (14),

$\delta\sigma$ определяется с точностью до не зависящей от температуры константы, произвольно выбранной на Рис. 2.

Следует отметить две особенности температурной зависимости $\delta\sigma$. Во-первых, мы видим, что вблизи перехода поправка растет с τ . Поскольку Рис. 2 построен для слабой дефазировки, $\gamma \approx 0.004$, видимые части кривых при $T \rightarrow T_c$ описываются вкладом АМТ, а не универсальным вкладом АЛ. В диффузионном пределе поправка АМТ нечувствительна к τ , тогда как в баллистическом пределе она растет с τ в соответствии с Ур. (13a) и (13b). Во-вторых, сильно выше перехода флуктуационная поправка растет с T для любой силы беспорядка. Таким образом, зависимость $\delta\sigma(T)$ имеет минимум для любой силы беспорядка.

Вторая глава посвящена разработке нового подхода, описывающего решения нелинейных уравнений стохастических уравнений с условием невыхода из полосы. В качестве примера выбрана задача о непадающей траектории перевернутого маятника под действием случайной горизонтальной силы $f(t)$ (стохастическая задача Уитни) и описываемом уравнением:

$$\ddot{\theta} = \omega^2 \sin \theta + f(t) \cos \theta, \quad (15)$$

где ω — частота малых колебаний вблизи положения равновесия, а угол θ отсчитывается от верхнего неустойчивого положения [см. рис. 3(c)]. Если рассматривать решения этого уравнения на всей временной оси, то такая задача допускает *единственное* решение, которое всегда остается в верхней полуплоскости $|\theta(t)| < \pi/2$; такое решение мы будем называть *никогда не падающей траекторией* (ННПТ). Доказательство существования такого решения хорошо известно в математической литературе [11; 13; 31; 32]. Однако, насколько нам известно, единственность такой траектории не обсуждалась ранее. В Приложении Б.1 диссертации приводится доказательство единственности ННПТ на физическом уровне строгости.

В качестве случайной горизонтальной силы мы выбираем модель белого шума с коррелятором

$$\langle f(t)f(t') \rangle = 2\alpha\delta(t - t'). \quad (16)$$

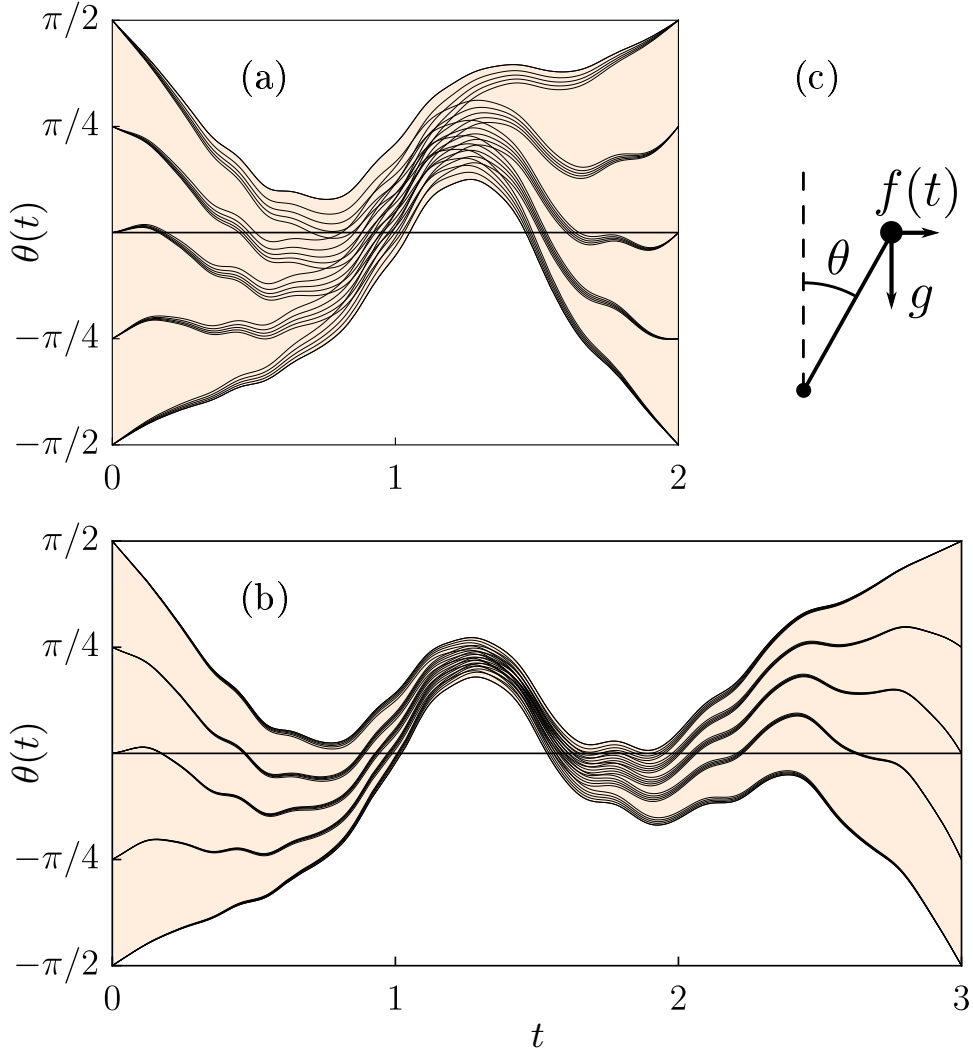


Рис. 3 — Примеры непадающих траекторий для уравнения движения маятника (15), рассматриваемого на двух временных интервалах: (а) $T = 2/\omega$ и (б) $T = 3/\omega$. Для любого выбора θ_1 и θ_2 в верхней полуплоскости ($|\theta| < \pi/2$) существует единственное непадающее решение, удовлетворяющее граничным условиям $\theta(0) = \theta_1$ и $\theta(T) = \theta_2$. На графиках построено по 25 таких траекторий с $\theta_{1,2} = (-1, -0.5, 0, 0.5, 1) \times \pi/2$. В обоих случаях возбуждающая сила выбрана в виде $f(t) = 4 \sum_{n=1}^{40} \cos(kt + k^4)$. (в) Перевернутый маятник под действием горизонтальной силы.

Такая модель может применяться, если время корреляции $f(t)$ намного меньше характерного времени движения маятника, в большинстве случаев это период колебаний, $2\pi/\omega$. В такой постановке статистика ННПТ зависит от единственного безразмерного параметра α/ω^3 .

Метод Паризи-Сурла. Для описания статистики ННПТ мы используем сиперсимметричный формализм, разработанный Паризи и Сурла [7; 8]. Идея этого формализма состоит в том, чтобы представить суммирование по решениям некоторого классического уравнения движения, $L(\theta(t)) = 0$, для динамической переменной $\theta(t)$ функциональным интегралом по всем $\theta(t)$, взвешенным с дельта-функцией $\delta[L(\theta(t))]$. Далее эта дельта-функция представляется в виде экспоненты от аргумента, посредством еще одного интеграла по вспомогательному полю λ , а возникающий из-за изменения переменных детерминант $|\det L'|$ записывается в виде функционального интеграла по паре грасмановских полей $\bar{\chi}, \chi$. В результате, теория формулируется в терминах суперсимметричного действия $S[\theta, \lambda, \bar{\chi}, \chi]$, которое позволяет провести усреднение по шуму в самом начале вычислений.

Для уравнения маятника (15), $L(\theta) = \ddot{\theta} - \omega^2 \sin \theta - f(t) \cos \theta$. В итоге, для любого среднего $A[\theta]$ по ННПТ мы получаем представление в виде функционального интеграла:

$$\langle \mathcal{A}[\theta_{\text{NFT}}] \rangle = \int \mathcal{D}\theta(t) \mathcal{D}\lambda(t) \mathcal{D}\bar{\chi}(t) \mathcal{D}\chi(t) \mathcal{A}[\theta(t)] \times \exp \left[\int dt (i \partial_t \lambda \partial_t \theta + \partial_t \bar{\chi} \partial_t \chi + \mathcal{V}) \right], \quad (17)$$

где потенциальный член \mathcal{V} дается формулой

$$\mathcal{V} = \omega^2 (i\lambda \sin \theta + \bar{\chi}\chi \cos \theta) + \alpha (i\lambda \cos \theta - \bar{\chi}\chi \sin \theta)^2. \quad (18)$$

Ключевой трюк, использованный при выводе теории поля (17), заключается в замене модуля детерминанта $|\det L'|$ самим детерминантом. Для произвольного стохастического уравнения это неверно, и поэтому подход Паризи-Сурла, вообще говоря, не работает, поскольку он взвешивает различные решения с произвольными знаками. Однако проблемы со знаком детерминанта не возникает, если решение стохастического динамического уравнения единственно. Именно эта ситуация и имеет место в случае ННПТ для пе-

ревернутого маятника и, следовательно, обосновывает использование метода Паризи-Сурла для решения данной задачи.

Трансфер-матричный Гамильтониан. Одномерная теория поля (17) может быть эквивалентно переформулирована, как эффективная квантовая механика [9] с некоторым трансфер-матричным гамильтонианом \mathcal{H} , действующим на волновую функцию $\hat{\Psi}(\theta, \lambda, \bar{\chi}, \chi)$. Тогда вычисление функционального интеграла сводится к решению уравнения Шредингера во мнимом времени: $\partial \hat{\Psi} / \partial t = -\mathcal{H} \hat{\Psi}$, а статистика ННПТ описывается его *нулевой модой*.

Выделяя явно зависимость волновой функции от грассмановых переменных,

$$\hat{\Psi}(\theta, \lambda, \bar{\chi}, \chi) = \Psi(\theta, \lambda) + \Phi(\theta, \lambda) \bar{\chi} \chi, \quad (19)$$

мы можем представить гамильтониан \mathcal{H} как обычный 2×2 дифференциальный оператор, действующий на вектор (Ψ, Φ) . Вследствие симметрии Бекки-Руэ-Стора-Тютина (БРСТ) теории [33], существует связь между Ψ и Φ , что позволяет написать уравнение на одну функцию. В данном случае эта редукция имеет вид $\Phi = -i\partial_\theta \Psi / \lambda$, что приводит к следующему уравнению:

$$(\lambda \partial_\lambda \partial_\theta \lambda^{-1} + \omega^2 \lambda \sin \theta + i\alpha \lambda^2 \cos^2 \theta) \Psi(\theta, \lambda) = 0. \quad (20)$$

Структура возникающего дифференциального оператора предполагает переход к *суперпотенциалу* $\psi(\theta, \lambda) = i\Psi(\theta, \lambda) / \lambda$, который является основным объектом нашей теории. Удобно сделать преобразование Фурье по переменной λ к перейти к сопряженному импульсу p : $\psi(\theta, \lambda) = \int \psi(\theta, p) e^{ip\lambda} dp$. В терминах функции $\psi(\theta, p)$, Ур. (20) принимает вид:

$$\hat{L}\psi(\theta, p) = 0, \quad \hat{L} = (p\partial_\theta + \omega^2 \sin \theta \partial_p - \alpha \cos^2 \theta \partial_p^2). \quad (21)$$

Примечательно, что Ур. (21) математически совпадает с уравнением Фоккера-Планка для стохастической динамики (15) [34; 35], однако оно записывается для вспомогательной функции ψ , которая не является функцией распределения. Сама же одновременная функция распределения (PDF) $P(\theta, p)$ в терминах $\psi(\theta, p)$ дается выражением

$$P(\theta, p) = \{\psi(\theta, p), \psi(\theta, -p)\}_{\theta, p}, \quad (22)$$

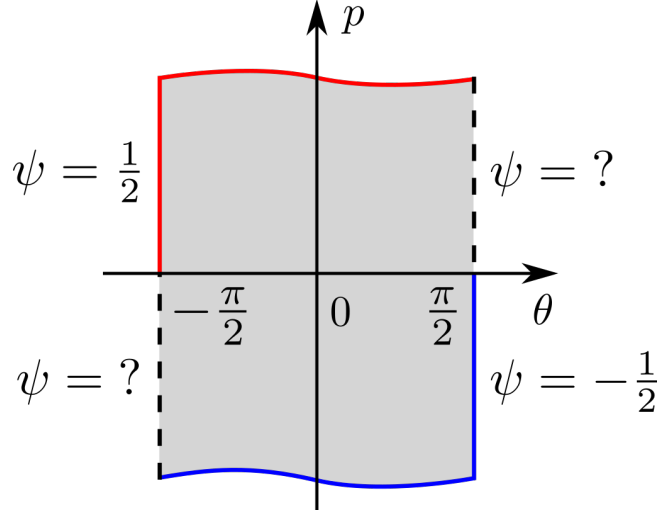


Рис. 4 — Граничные условия (23) к Ур. (21) для функции $\psi(\theta, p)$. Последняя подлежит определению во внутренней области и на двух пунктирных отрезках границы.

где $\{f, g\}_{\theta, p} = (\partial_\theta f)(\partial_p g) - (\partial_p f)(\partial_\theta g)$ — стандартным образом определенная скобка Пуассона. Билинейная зависимость PDF от ψ отражает тот факт, что ННПТ содержит знание как о прошлом ($p > 0$), так и о будущем ($p < 0$).

Граничные условия. Важным элементом теории являются граничные условия для нулевой моды. В силу билинейной зависимости PDF (22) от ψ , для невыхода из полосы оказывается возможным наложить граничные условия только на половине краевых линий $\theta = \pm\pi/2$:

$$\psi(\pi/2, p < 0) = \psi(\theta, -\infty) = -1/2, \quad (23a)$$

$$\psi(-\pi/2, p > 0) = \psi(\theta, \infty) = 1/2. \quad (23b)$$

Эти граничные условия показаны на Рис. 4. Поскольку PDF (22) выражается в терминах производных ψ , ее точное значение на границе может быть выбрано произвольным. Однако единичная нормировка $P(\theta, p)$ накладывает ограничение $\psi(\theta, \infty) - \psi(\theta, -\infty) = 1$. Разрешая его симметричным образом, мы приходим к Ур. (23).

Решение в отсутствие горизонтальной силы. В тривиальном случае, когда $\alpha = 0$, уравнение Фоккера-Планка (21) становится уравнением первого порядка и может быть элементарно решено: $\psi(\theta, p) = \frac{1}{2} \text{sign}(p - 2\omega \sin \theta/2)$. Тогда две производные в скобке Пуассона (22) порождают две дельта-функ-

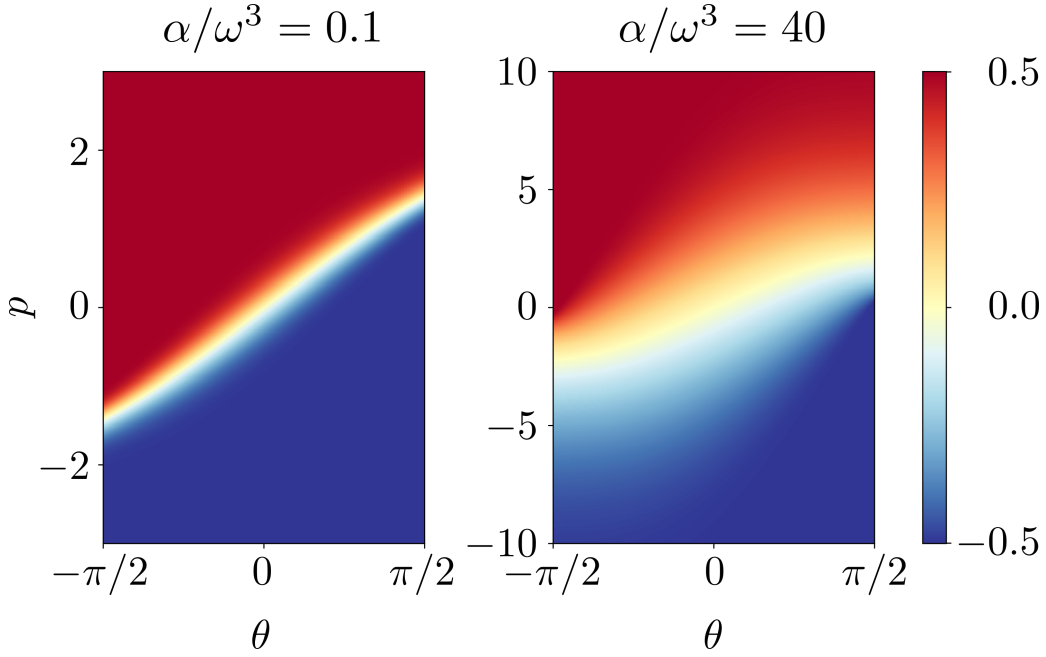


Рис. 5 — Суперпотенциал $\psi(\theta, p)$ для $\alpha/\omega^3 = 0.1$ (слабый шум) и 40 (сильный шум), полученные численным решением уравнения (21) с граничными условиями (23).

ции в PDF: $P(\theta, p) = \delta(\theta)\delta(p)$, что соответствует неустойчивому верхнему положению маятника.

Случай слабого шума. В случае $\alpha \ll \omega^3$ резкий скачок на линии $p = 2\omega \sin \theta/2$ размывается, как видно на Рис. 5(а). Чтобы найти PDF, которая локализована на малых углах, оператор в Ур. (21) может быть линейризован: $p\partial_\theta + \omega^2\theta\partial_p - \alpha\partial_p^2$. Тогда нулевая мода принимает вид

$$\psi(\theta, p) = \frac{1}{2} \operatorname{erf}[\kappa(p - \omega\theta)], \quad (24)$$

где $\kappa = (\omega/2\alpha)^{1/2}$; в этом пределе $\kappa\omega \gg 1$. Подставляя $\psi(\theta, p)$ в выражение (22), мы приходим к:

$$P(\theta, p) = \frac{\omega^2}{\pi\alpha} \exp\left(-\frac{\omega^3}{\alpha}\theta^2 - \frac{\omega}{\alpha}p^2\right). \quad (25)$$

Точное решение в пределе $\omega \rightarrow 0$. Оказывается, что в отсутствие гравитации ($\omega = 0$) суперпотенциал ψ может быть найден точно, что позволяет получить аналитический ответ и для функции распределения $P(\theta, p)$. В этом пределе Ур. (21) может быть приведено к канонической форме путем разде-

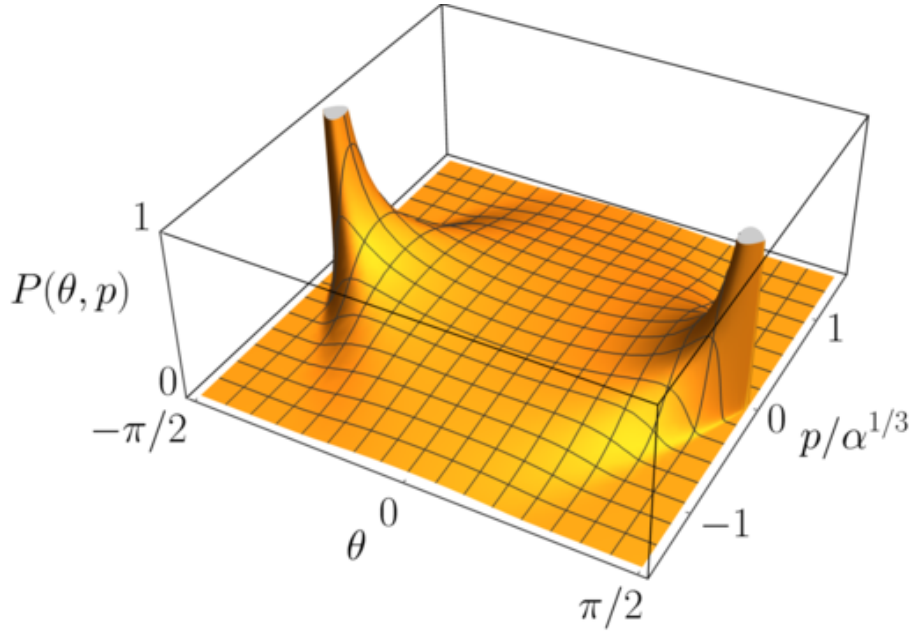


Рис. 6 — Совместная функция распределения угла и импульса ННПТ для случая $\omega = 0$, задаваемая уравнением (29).

ления переменных:

$$\partial_\tau \psi = q^{-1} \partial_q^2 \psi, \quad (26)$$

где τ и q — новые координата и скорость, определяемые выражениями:

$$\tau = \frac{4}{\pi} \int_0^\theta \cos^2 \theta' d\theta' = \frac{2\theta + \sin 2\theta}{\pi}, \quad q = \left(\frac{4}{\pi\alpha} \right)^{1/3} p. \quad (27)$$

Нормировка τ выбрана так, что границы $\theta = \pm\pi/2$ переходят в $\tau = \pm 1$.

Решение Ур. (26), удовлетворяющее граничным условиям (23), может быть получено с помощью мультипликативного преобразования Эйри и дается явной формулой:

$$\psi(\tau, q) = \frac{3 \text{Ai}'(0)}{\text{Ai}(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu}{\mu} \text{Ai}[(3/2)^{2/3} \mu^2] \text{Ai}(\mu q) e^{\mu^3 \tau}. \quad (28)$$

Подставляя в (22), получаем совместную функцию распределения исходного угла и скорости (показана на Рис. 6):

$$P(\theta, p) = -\frac{16 \cos^2 \theta}{3^{1/3} \pi^{4/3} \alpha^{1/3}} \left(\frac{\text{Ai}'(0)}{\text{Ai}(0)} \right)^2 \frac{\text{Ai}(s^2) \text{Ai}'(s^2)}{1 - \tau^2}, \quad (29)$$

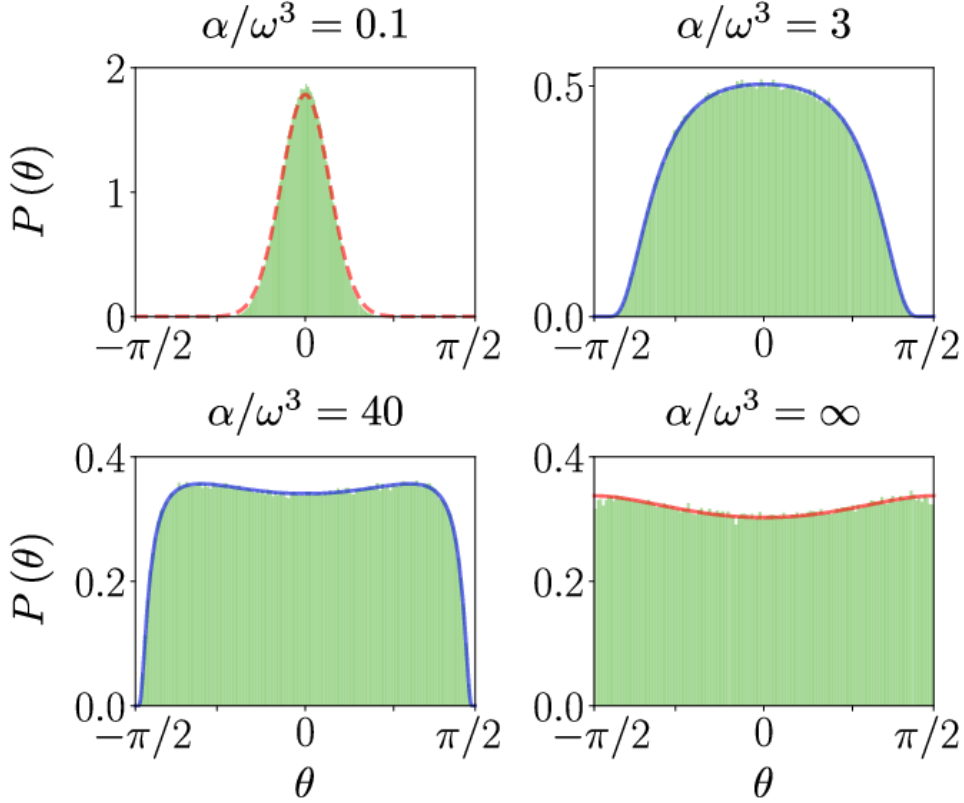


Рис. 7 — Функция распределения углов ННПТ, $P(\theta)$, для нескольких значений α/ω^3 : (а) 0.1, (б) 3, (с) 40, (д) ∞ . Зеленые гистограммы получены прямым моделированием уравнения (15) методом Монте-Карло.

Пунктирная красная линия на панели (а) — решение (25) для слабой накачки. Численные решения Ур. (21) и (23) показаны синими линиями. Сплошная красная линия на панели (д) — точное решение (30) для $\omega = 0$.

где $s = q/[6(1 - \tau^2)]^{1/3}$. Интегрируя по импульсу p , получаем функцию распределения по координате θ :

$$P(\theta) = \frac{4}{\pi^{1/6}} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/3)} \frac{\cos^2 \theta}{[\pi^2 - (2\theta + \sin 2\theta)^2]^{2/3}}, \quad (30)$$

которая показана сплошной красной линией на Рис. 7(d).

При произвольных значениях α/ω^3 Ур. (21) с граничными условиями (23) может быть решено только численно. Стандартный метод конечных элементов, естественным образом обобщенный для включения частей границы с неизвестными $\psi(\theta, p)$, оказывается устойчивым. Два решения для $\psi(\theta, p)$ показаны на Рис. 5. Соответствующие функции распределения угла на ННПТ,

$P(\theta)$, полученные путем интегрирования $P(\theta, p)$, найденных из Ур. (22), по p , показаны сплошными синими линиями на Рис. 7(b,c).

В Третьей главе, продолжающей построению теории непадающих траекторий в стохастической задаче Уитни, рассматривается круг вопросов, связанных с ляпуновской экспонентой для НПТ. Ляпуновская экспонента определяет как закон сходимости НПТ на конечном временном интервале к ННПТ на бесконечном временном интервале (см. Рис. 3), так и затухание разновременных корреляторов на ННПТ:

$$\lambda = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial \ln \langle \theta(0) \theta(t) \rangle}{\partial t}. \quad (31)$$

С технической точки зрения, основной результат этой главы состоит в описании всего спектра трансфер-матричного гамильтониана, в то время как в Гл. 2 была исследована только его нулевая мода. На этом языке ляпуновская экспонента определяется энергией первого возбужденного состояния.

В этой главе показано, что для описания как разновременных корреляционных функций ННПТ, так и НПТ на конечном временном интервале недостаточно ограничиться только БРСТ-симметричным сектором, а приходится работать с двухкомпонентной «волновой функцией» (Ψ, Φ) . Также обсуждается, что эффективный трансфер-матричный гамильтониан не просто является неэрмитовым, но приводится к нормальной жордановой форме. Данное обстоятельство приводит к появлению дополнительных степеней времени на фоне обычного экспоненциального затухания различных корреляционных функций, см., напр., уравнение (32).

Далее в диссертации подробно изучается случай слабого шума, $\alpha \ll \omega^3$. В этом режиме представлена полная система собственных и присоединенных функций, в которой оператор \hat{L} из уравнения (21) и, следовательно, трансфер-матричный гамильтониан приводятся к жордановой форме. Также показано, как забываются начальные условия, и вычислены разновременные корреляционные функции ННПТ, напр.:

$$\langle \theta(0) \theta(t) \rangle = \frac{\alpha}{2\omega^3} (1 + \omega t) e^{-\omega t}. \quad (32)$$

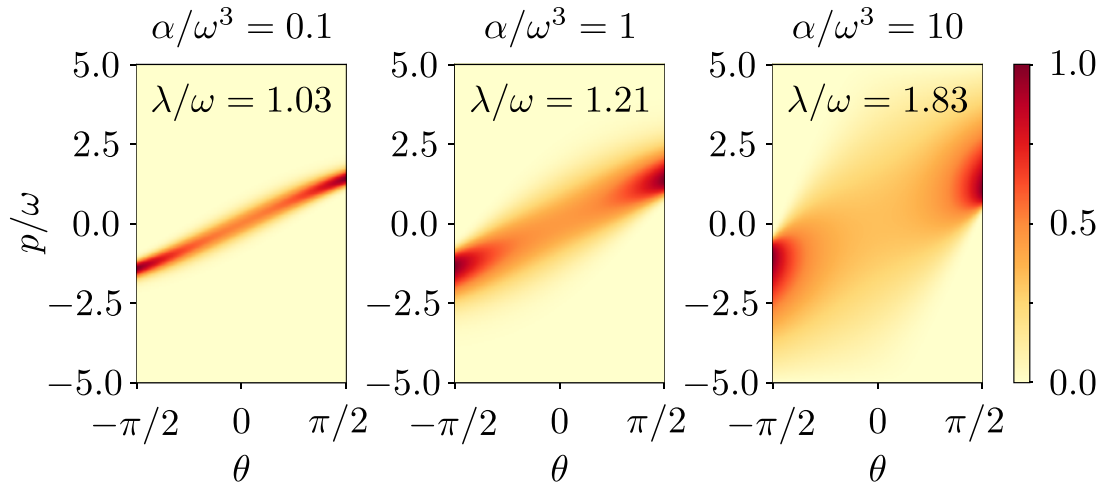


Рис. 8 — Первое возбужденное состояние $\psi_1(\theta, p)$ оператора в (21) при трех значениях параметра $\alpha/\omega^3 = 0.1, 1, 10$. Волновая функция нормирована на максимальное значение.

При произвольном значении α/ω^3 уравнение на высшие моды трансфер-матричного гамильтониана необходимо решать численно. Для определения энергии первого возбужденного состояния достаточно найти первое возбужденное состояние оператора (21) с граничными условиями, получающимися из условий (23) заменой ψ нулем на известной части границы. Найденные численно решения для различных значений α/ω^3 показаны на Рис. 8.

Ляпуновская экспонента в задаче о перевернутом маятнике с накачкой в виде белого шума (16) может быть записана в виде

$$\lambda = \omega g(\alpha/\omega^3), \quad (33)$$

где функция $g(x)$ имеет следующие асимптотики:

$$g(x) = \begin{cases} 1 + \frac{3}{8}x - \frac{525}{1024}x^2 + \dots, & x \ll 1; \\ 0.66 x^{1/3} + 0.26 + 0.30 x^{-1/3} \dots, & x \gg 1. \end{cases} \quad (34)$$

Разложение на малых α/ω^3 получено методом теории возмущения, а разложение на больших α/ω^3 — из описанного выше численного анализа. Зависимость ляпуновской экспоненты от параметра α/ω^3 показана на Рис. 9.

В четвертой главе заложены основы теории статистического описания плотности состояний в неоднородных сверхпроводящих проволоках.

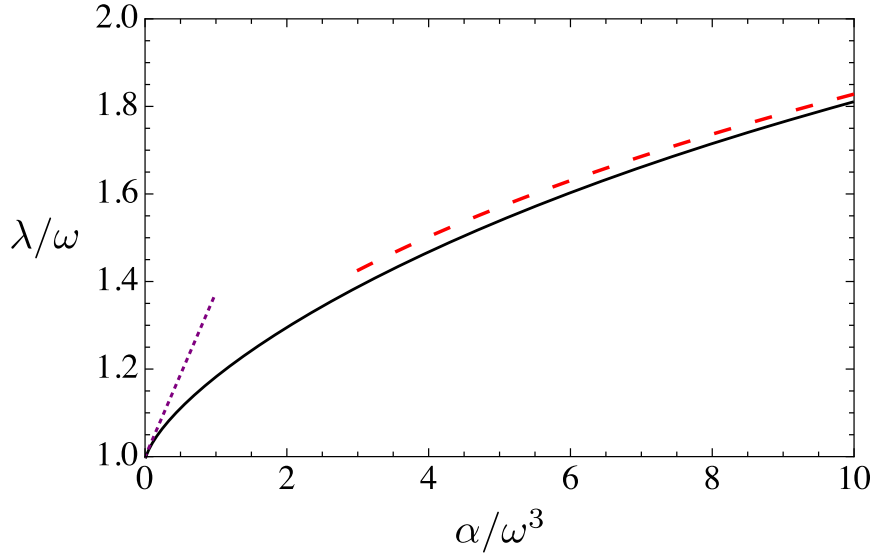


Рис. 9 — Зависимость ляпуновской экспоненты для НПТ от силы накачки.

Пунктиром показана линейная часть асимптотики при малых α , а штриховой линией — первые три члена разложения (34) на больших x .

В качестве отправной точки выбрана феноменологическая модель неоднородного сверхпроводника, предложенная в работе Ларкина и Овчинникова [36], где источником неоднородности выступают флуктуации константы связи. Локальная плотность состояний $\nu(E, \mathbf{r}) = \nu_0 \text{Re} \cos \theta(E, \mathbf{r})$ определяется спектральным углом $\theta(E, \mathbf{r})$, который в одномерной геометрии удовлетворяет уравнению Узаделя:

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} + i\epsilon \sin \theta + \cos \theta + f(x) \cos \theta = 0, \quad (35)$$

где $\epsilon = E/\Delta_0$ — энергия в единицах щели, а x — координата вдоль провода в единицах длины когерентности $\xi_0 = \sqrt{D/2\Delta_0}$. Функция $f(x) = \Delta_1(r)/\Delta_0$ в уравнении (35) описывает случайную в пространстве часть параметра порядка. В предположении, что радиус корреляции беспорядка $\Delta_1(r)$ не превышает ξ_0 , поле $f(x)$ можно считать гауссовым белым шумом с коррелятором

$$\langle f(x)f(x') \rangle = 2\alpha \delta(x - x'). \quad (36)$$

В рамках самосогласованного подхода Ларкина и Овчинникова, учет флуктуаций Δ_1 приводит к эффективному распариванию, измеряемому без-

размерным параметром

$$\eta = \frac{2}{\Delta_0} \int \frac{f(q)}{Dq^2} \frac{d^d q}{(2\pi)^d}. \quad (37)$$

В одномерной геометрии интеграл (37) расходится на малых импульсах, что указывает на разрушение теории среднего поля. При этом Флуктуации становятся настолько сильными, что плотность состояний $\nu(E)$ вблизи пика перестает быть самоусредняемой величиной. В такой ситуации имеет смысл изучать не среднюю $\langle \nu(E) \rangle$, а всю функцию распределения $P(\nu(E))$. Для этого требуется описать статистику θ для заданной энергии E , как это было сделано для случая ННПТ в стохастической задаче Уитни.

Условие, отличающее физические решения от нефизических, диктуется требованием неотрицательности плотности состояний. С учетом выражения $\nu = \nu_0 \operatorname{Re} \cos$, оно принимает вид $|\operatorname{Re} \theta| < \pi/2$. Такое условие из многих решений уравнений Узаделя выделяет только одно физически реализуемое решение, так же как и условие невыхода из полосы $|\theta| < \pi/2$ для перевернутого маятника выделяет одну ННПТ.

Поскольку уравнение Узаделя (35) с беспорядком (36) похоже на уравнение маятника со случайной горизонтальной силой, для решения поставленной задачи можно применить суперсимметричный метод, разработанный в Главах 2 и 3. Основное отличие от стохастической задачи Уитни состоит в том, что в случае сверхпроводящего провода спектральный угол $\theta(x)$ является комплексной функцией. Это приводит к четырехмерному фазовому пространству, в то время как для обычного маятника оно было двумерным.

Выведенная в четвертой главе диссертационной работы система уравнений для описания статистических свойств одномерного уравнения Узаделя (35) обобщает результаты второй и третьей главы. В данном случае нулевая мода трансфер-матричного гамильтониана параметризуется четырьмя компонентами Ψ_{ij} , которые связаны с суперпотенциалом $\psi(\theta, \theta^*, p, p^*)$ соотношениями

$$\Psi_{00} = \partial_p \partial_{p^*} \psi, \quad \Psi_{10} = \partial_\theta \partial_{p^*} \psi, \quad \Psi_{01} = \partial_{\theta^*} \partial_p \psi, \quad \Psi_{11} = \partial_\theta \partial_{\theta^*} \psi, \quad (38)$$

следующими из БРСТ симметрии теории. Функция распределения спектрального угла и его производной выражается посредством

$$P(\theta, \theta^*, p, p^*) = \bar{\Psi}_{00}\Psi_{11} + \bar{\Psi}_{11}\Psi_{00} + \bar{\Psi}_{10}\Psi_{01} + \bar{\Psi}_{01}\Psi_{10}. \quad (39)$$

Уравнение на суперпотенциал удобнее записывать в терминах переменных $(\theta', \theta'') = (\text{Re } \theta, \text{Im } \theta)$ и $(p', p'') = (\text{Re } p, \text{Im } p)$. Внутри полосы $|\theta'| < \pi/2$ он удовлетворяет обобщенному уравнению Фоккера-Планка:

$$\begin{aligned} (p' \partial_{\theta'} + p'' \partial_{\theta''}) \psi + \alpha (\cos \theta' \cosh \theta'' \partial_{p'} - \sin \theta' \sinh \theta'' \partial_{p''})^2 \psi \\ = [\cos \theta' (\epsilon \sinh \theta'' + \cosh \theta'') \partial_{p'} - \sin \theta' (\epsilon \cosh \theta'' + \sinh \theta'') \partial_{p''}] \psi. \end{aligned} \quad (40)$$

Условие непокидания полосы имеет такой же вид, как у маятника:

$$\Psi_{00}(\theta' = \pi/2, p' > 0) = \Psi_{00}(\theta' = -\pi/2, p' < 0) = 0. \quad (41)$$

Условие нормировки формулируется как

$$\int \Psi_{00}(\theta', \theta'', p', p'') dp' dp'' = 1. \quad (42)$$

Функция распределения локальной $\nu(E)$ дается интегралом

$$P(\nu(E)) = \int P(\theta', \theta'') \delta(\nu/\nu_0 - \cos \theta' \cosh \theta'') d\theta' d\theta''. \quad (43)$$

Выведенная система уравнений является отправной точкой для описания статистики плотности состояний в неоднородных сверхпроводящих проводках. В общем случае ее решение требует привлечение серьезного численного счета.

В **Заключении** приведены основные результаты работы.

Многочисленные технические детали вычислений приведены в двух **Приложениях**.

Список литературы

1. *Гантмахер В. Ф., Долгополов В. Т.* // УФН. — 2010. — т. 180. — с. 3.
2. *Peltonen J. T.* [и др.] // Scientific Reports. — 2018. — т. 8, № 1. — с. 10033.
3. *Semenov A. D., Gol'tsman G. N., Korneev A. A.* // Physica C: Superconductivity. — 2001. — т. 351, № 4. — с. 349—356.
4. *Gol'tsman G. N.* [и др.] // Applied Physics Letters. — 2001. — т. 79, № 6. — с. 705—707.
5. *Douçot B., Ioffe L. B.* // Reports on Progress in Physics. — 2012. — т. 75, № 7. — с. 072001.
6. *Larkin A. I., Varlamov A. A.* Theory of fluctuations in superconductors. — Clarendon Press, Oxford, 2005.
7. *Parisi G., Sourlas N.* // Phys. Rev. Lett. — 1979. — т. 43, вып. 11. — с. 744—745.
8. *Parisi G., Sourlas N.* // Nuclear Physics B. — 1982. — т. 206, № 2. — с. 321—332.
9. *Ефетов К., Ларкин А.* // ЖЭТФ. — 1983. — т. 82, вып. 2. — с. 764—778.
10. *Courant R., Robbins H.* What is Mathematics?: an elementary approach to ideas and methods. — Oxford University Press, 1996.
11. *Broman A.* // Nordisk Matematisk Tidskrift. — 1958. — т. 6, № 2. — с. 78—82.
12. *Arnold V.* What is mathematics? (in Russian). — МССМЕ, Moscow, 2002.
13. *Polekhin I. Y.* // Нелинейная Динамика. — 2014. — т. 10. — с. 465—472.
14. *Асламазов Л., Ларкин А. И.* // Физика тверд. тела. — 1968. — т. 10, № 4. — с. 1104—1111.
15. *Maki K.* // Progress of Theoretical Physics. — 1968. — т. 40, № 2. — с. 193—200.
16. *Thompson R. S.* // Phys. Rev. B. — 1970. — т. 1, вып. 1. — с. 327—333.
17. *Aslamasov L. G., Varlamov A. A.* // Journal of Low Temperature Physics. — 1980. — т. 38, № 1. — с. 223—264.

18. *Альтшуллер Б. Л., Варламов А. А., Рейзер М. Ю.* // ЖЭТФ. — 1983. — т. 84. — с. 2280.
19. *Aronov A. G., Hikami S., Larkin A. I.* // Phys. Rev. B. — 1995. — т. 51, вып. 6. — с. 3880—3885.
20. *Randeria M., Varlamov A. A.* // Phys. Rev. B. — 1994. — т. 50, вып. 14. — с. 10401—10404.
21. *Dorin V. V.* [и др.] // Phys. Rev. B. — 1993. — т. 48, вып. 17. — с. 12951—12965.
22. *Livanov D. V., Savona G., Varlamov A. A.* // Phys. Rev. B. — 2000. — т. 62, вып. 13. — с. 8675—8678.
23. *Reggiani L., Vaglio R., Varlamov A. A.* // Phys. Rev. B. — 1991. — т. 44, вып. 17. — с. 9541—9546.
24. *Galitski V. M., Larkin A. I.* // Phys. Rev. B. — 2001. — т. 63, вып. 17. — с. 174506.
25. *Glatz A., Varlamov A. A., Vinokur V. M.* // Phys. Rev. B. — 2011. — т. 84, вып. 10. — с. 104510.
26. *Tikhonov K. S., Schwiete G., Finkel'stein A. M.* // Phys. Rev. B. — 2012. — т. 85, вып. 17. — с. 174527.
27. *Serbin M. N., Skvortsov M. A., Varlamov A. A., Galitski V.* // Phys. Rev. Lett. — 2009. — Vol. 102. — P. 067001.
28. *Michaeli K., Finkel'stein A. M.* // Europhys. Lett. — 2009. — т. 86, № 2. — с. 27007.
29. *Petković A., V. V.* // Journal of Physics: Condensed Matter. — 2013. — т. 25, № 35. — с. 355701.
30. *Zala G., Narozhny B. N., Aleiner I. L.* // Phys. Rev. B. — 2001. — т. 64, вып. 21. — с. 214204.
31. *Zubelevich O.* // Applicationes Mathematicae. — 2015. — т. 42, № 2/3. — с. 159—165.
32. *Srzednicki R.* // Discrete & Continuous Dynamical Systems. — 2019. — т. 12, № 7. — с. 2127.

33. *Zinn-Justin J.* Quantum Field Theory and Critical Phenomena. — Clarendon Press, Oxford, 2015.
34. *Kramers H.* // *Physica*. — 1940. — т. 7, № 4. — с. 284—304.
35. *Risken H.* The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications. — Springer, Berlin, 1996.
36. *Ларкин А. И., Овчинников Ю. Н.* // *ЖЭТФ*. — 1971. — т. 61. — с. 2147.