На правах рукописи

Марихин Владимир Георгиевич

Квазиштеккелевы гамильтонианы, канонические преобразования Беклунда и другие аспекты теории интегрируемых систем

Специальность 01.01.03 — математическая физика

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Черноголовка 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук.

Официальные оппоненты: Андрей Евгеньевич Миронов,
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН,
ФГБУН Институт математики
им. С.Л. Соболева СО РАН,
ведущий научный сотрудник

Олег Иванович Мохов,
доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник,
ФГБОУВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»
профессор кафедры высшей геометрии и топологии Механико-математического ф-та

Андрей Владимирович Цыганов,
доктор физико-математических наук, доцент,
ФГБОУВО «Санкт-Петербургский государственный университет», профессор кафедры вычислительной физики Физического ф-та

Ведущая организация: ФГБУН Институт математики
с вычислительным центром УНЦ РАН

Защита состоится 30 июня 2017 г. в 11 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 002.207.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, расположенном по адресу: 142432, Московская обл., г. Черноголовка, проспект академика Семенова д. 1-а, Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау или на сайте диссертационного совета http://www.itp.ac.ru/ru/dissertation-council/.

Автореферат разослан 2017 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук П.Г. Гриневич

Общая характеристика работы

Актуальность темы и степень ее разработанности. Квазиштеккелевы гамильтонианы (т.е. штеккелевы гамильтонианы с магнитным полем) являются важным объектом для изучения, поскольку классические волчки с дополнительным квадратичным интегралом движения с помощью координат Дарбу можно привести к паре коммутирующих квадратичных по импульсам гамильтонианов с двумя степенями свободы, которые в свою очередь могут быть преобразованы к паре квазиштеккелевых гамильтонианов, как будет показано в Главе 1. Это значительно расширяет круг возможных приложений. Объекты, аналогичные квазиштеккелевым гамильтонианам, появлялись в литературе ранее в работе Ферапонтова и Форди [1], где были получены ряд примеров таких пар; достаточно много представителей таких систем (в несколько иной калибровке) получил Яхья [2] (см. также ссылки в этой работе). Стоит выделить также работу Дорицци, Грамматикоса, Рамани и Винтерница [3]. Следует отметить, что публикаций, где изучаются объекты типа квазиштеккелевых гамильтонианов, относительно немного по сравнению с десятками публикаций, где изучаются штеккелевы гамильтонианы (см. Раздел 1.1 Главы 1).

При коммутировании квазиштеккелевых гамильтонианов возникают два нетривиальных условия (в отличие от штеккелевых гамильтонианов, где подобные условия вообще не возникают), которые непросто разрешить. Вообще, такого рода трудности возникают в системах, зависящих от магнитного поля. Следует отметить, что именно изучение различных систем с магнитным полем является наиболее актуальным. Отметим также, что объекты, сходные с квазиштеккелевыми гамильтонианами с тремя степенями свободны, ранее не изучались.

Классические волчки, особенно волчок Клебша и волчок Шоттки–Манакова, активно изучались во многих работах [4, 5, 6, 7, 8, 9] и др., они также подробно разобраны в книге Борисова и Мамаева [10]. Связь этих и других волчков с квазиштеккелевыми гамильтонианами будет изучаться в данной диссертации.

Что касается квантовых аналогов квазиштеккелевых систем, то эта тема не отражена должным образом в литературе, в отличие от квантовых штеккелевых гамильтонианов, которые изучались, в частности, в работе [11]. Проблема интегрируемых случаев двумерного уравнения Шредингера в электромагнитном поле изучается довольно давно (см. [1] и ссылки там), но до сих пор не исследована до конца.

С появлением современных методов интегрируемых систем были рассмотрены разные аспекты исследуемой задачи. В работе [12] был изучен класс решений (конечнозонных) уравнения Шредингера с магнитным полем (см. также [13]). В работе [14] для решения данной задачи применялся метод факторизации (см. также ссылки в этой работе).

Задача об уравнении Шредингера в магнитном поле с дополнительным линейным либо квадратичным дополнительным интегралом движения рассматривалась в работе [15] (см. также цитируемые там работы). В этой работе был получен ряд интересных примеров таких уравнений в различных системах координат, но дифференциальные уравнения, соответствующие этим примерам, не были проинтегрированы.

Коммутативные кольца дифференциальных операторов играют важную роль в математической физике. В случае одной независимой переменной задача их описания была поставлена и решена в работах Шура [16] и Бёрчнелла–Чонди [17]. Позднее эти результаты нашли многочисленные приложения в теории интегрируемых уравнений типа Кортевега–де Фриза, отметим лишь описание конечнозонных операторов, полученное Новиковым, Кричевером и др. [18, 19], и алгоритм проверки необходимых условий интегрируемости, разработанный Шабатом и др. [20].

Преобразования Беклунда (ПБ) являются довольно мощным инструментом в теории интегрируемых систем. С одной стороны, они являются критерием интегрируемости системы, с другой стороны позволяют "размножать" решения системы, начиная с любого ее решения, даже тривиального.

Данное преобразование было получено впервые Беклундом в 1883 году [21]. Он получил преобразование, которое одну поверхность отрицательной кривизны трансформирует в другую. Это преобразование эквивалентно преобразованию Беклунда уравнения sin–Gordon. Впоследствии ПБ приобрели не только геометрический смысл.

По мере появления новых интегрируемых систем вскоре появлялись преобразования Беклунда и для них. Поскольку большинство этих систем выражается через представление Лакса с матрицами размера 2×2, получение соответствующих преобразований Беклунда не вызывало особых сложностей. Однако в случае матриц с большим размером ситуация значительно усложняется. Мы приведем пример такого рода далее. Представление преобразований Беклунда в виде канонического преобразования было введено в работе Кодамы и Вадати [22] для уравнений КдФ, мКдФ, sin-Gordon. Данный метод также применялся в работе Кузнецова и Склянина[23] для периодической цепочки Тоды и для эллиптической модели Руйзенарса.

Методы одевания и разделения переменных являются чрезвычайно эффективными для исследования интегрируемых систем. Однако, насколько нам известно, синтез этих методов не применялся ранее.

Уравнения Пенлеве ($PI - PVI$) [24], известные еще с конца прошлого века, в настоящее время привлекают пристальное внимание из-за их широкого применения в различных областях физики и математики. Изначально они были получены Пенлеве как дифференциальные уравнения второго порядка, решения которых не обладают подвижными особыми точками, кроме полюсов. На самом деле подвижные особенности решений всех уравнений Пенлеве, кроме Пенлеве I, являются полюсами первого порядка в общем случае. Уравнение Пенлеве I выбивается из общего ряда, во-первых, из-за того, что его решения могут иметь подвижные особенности только в виде полюсов второго порядка, во-вторых, это уравнение не имеет преобразований Беклунда.

Как известно, некоторые уравнения Пенлеве могут быть получены как автомодельные редукции интегрируемых динамических систем. В работе [25] было показано, что уравнение PIV может быть получено как автомодельная редукция нелинейного уравнения Шредингера (НШ), а в Главе 6 рассмотрен лагранжиан системы Леви, показано, что в автомодельных переменных вариация этого лагранжиана приводит к уравнению PIV, а также установлено, что все рациональные решения уравнения PIV определяют решение задачи о стационарном распределении двумерного кулоновского газа в параболическом потенциале.

Используемый в диссертации метод представления дифференциальных нелинейных уравнений в пространстве Фурье имеет свой аналог (но не буквально), так называемый символьный метод.

Этот метод был введен в теорию интегрируемых систем Гельфандом и Диким [26], а также Захаровым и Шульманом как пертурбативный подход и улучшен в недавних работах Сандерса [27], а также Михайлова и В. Новикова [28]. Общей чертой и основным преимуществом обоих методов является то обстоятельство, что все коэффициенты рассматриваемых уравнений в пространстве Фурье являются функциями волновых чисел k, а не операторами.

Цель работы. Целью работы является изучение квазиштеккелевых гамильтонианов как в классическом, так и в квантовом случаях, их связи с классическими волчками, а также с гамильтоновыми системами, квадратичными по импульсу. Кроме того, будет исследоваться определенный класс дифференциальных операторов, связанных с квантовыми аналогами интегрируемых волчков. Еще одной целью работы является развитие нового метода получения преобразований Беклунда, а также построение производящих функций этих преобразований. Также будут изучаться: применение метода одевания к системам с разделенными переменными, построение представления кулоновского газа для некоторых трансцендент Пенлеве, построение пары Лакса и классификация скалярных динамических систем с квадратичной нелинейностью в представлении Фурье и изучение других вопросов.

Научная новизна. Все результаты, выносимые на защиту, принадлежат автору и являются новыми. В некоторых случаях для логической связности текста в диссертации будут использованы результаты, полученные совместно с соавторами. И хотя вклад автора в получение этих результатов существенен, они не выносятся на защиту.

Такие результаты как новые примеры двумерных интегрируемых уравнений Шредингера с магнитным полем, новое преобразование Беклунда уравнения Цицейки, представление кулоновского газа для уравнений Пенлеве, классификация скалярных динамических систем с квадратичной нелинейностью и другие результаты, выносимые на защиту и перечисленные ниже, представляют несомненный интерес.

Положения, выносимые на защиту.

1. Получены необходимые и достаточные условия коммутирования пары квадратичных по импульсам гамильтонианов с двумя степенями свободы. Предложен метод "частичного" разделения переменных. Вычислены алгебраические кривые и функции Гамильтона–Якоби. Найдено преобразование гамильтонианов к канонической квазиштеккелевой паре (штеккелевы гамильтонианы с магнитным полем).

2. Классический случай обобщен на квантовый. Построена полная классификация квазиштеккелевых гамильтонианов, соответствующих двумерному оператору Шредингера с магнитным полем. Получены и проинтегрированы, в терминах функций Гойна, новые "квазиточно решаемые" примеры таких операторов.

3. Получены трехкомпонентные классические и квантовые квазиштеккелевы системы. В классическом случае проведена полная классификация этих систем. В простейшем случае система проинтегрирована в квадратурах.

4. Исследованы квантовые аналоги интегрируемых волчков на алгебрах e(3) и so(4). Генераторы соответствующих алгебр представлены в виде дифференциальных операторов первого порядка и получены пары коммутирующих дифференциальных операторов с двумя независимыми переменными. Получены квантовые аналоги волчка М. Адлера–ван Мёрбеке и волчка Соколова на so(4).

5. Развит метод получения преобразований Беклунда, основанный на инвариантности вариации действия относительно ПБ. Построены треугольные решетки ПБ для дивергентных систем и уравнения Ландау–Лифшица. Найдено новое ПБ для уравнения Цицейки. Построена октаэдрическая решетка для интегрируемых версий системы Дэви–Стюартсона. Чисто дискретное уравнение, принадлежащее этой решетке, совпадает со знаменитым уравнением Хироты.

6. Установлено, что задача об L-A парах в Фурье представлении для скалярных уравнений с квадратичной нелинейностью сводится к функциональному уравнению. Получены новые примеры бездисперсионных систем и показано, что в рассматриваемом классе системы с дисперсией являются подклассом бездисперсионных.

7. Найдено представление кулоновского газа для нулей числителя и знаменателя рациональных решений уравнений Пенлеве $PII - PIV$. Показано, что любое рациональное решение этих уравнений определяет стационарную конфигурацию электрических зарядов, причём заряды могут быть разноименными. Исследована решётка ПБ для уравнения Пенлеве IV. Выведены уравнения на нули и полюса рациональных решений уравнений $PV - PVI$.

8. Исследована динамика полюсов для рациональных решений системы Леви и двумеризованной системы Тоды. Получено алгебраическое решение задачи Коши для одного из многочастичных уравнений Калоджеро (рационального уравнения Руйзенарса–Шнайдера).

Теоретическая и практическая значимость работы. Данная диссертация является теоретической работой. Ее результаты развивают теорию интегрируемых систем, в том числе в области конечномерных гамильтоновых систем, нелинейных дифференциальных уравнений математической физики и других областях науки. Эти результаты имеют целый ряд приложений, часть из которых исследовалась в диссертации.

Методы исследования. В диссертации использованы такие методы, как представление Лакса, являющееся основным для построения интегрируемых систем, высших симметрий для них; тест Пенлеве, который является необходимым условием интегрируемости системы и чрезвычайно эффективным способом ”отсекать” неинтегрируемые случаи; метод одевания, который обычно используется для построения преобразований Беклунда, однако в данной работе он использовался как одевание на один шаг для системы с разделенными переменными и др. Отметим, что некоторые методы, используемые в диссертации, разработаны автором — приведение коммутирующих гамильтонианов к квазиштеккелеву виду, что сильно упрощает анализ системы; метод получения алгебраических кривых соответствующих квазиштеккелевых гамильтонианов; метод ”частичного разделения переменных”; а также использование пары Лакса в Фурье-пространстве для динамических систем с квадратичной нелинейностью.

Степень достоверности Достоверность полученных результатов не вызывает сомнений, так как при их исследовании применялись методы, широко используемые в теории интегрируемых систем. Было проведено сравнение некоторых из полученных результатов с аналогичными результатами, полученными другими методами. К примеру, алгебраические кривые, описывающие динамику некоторых классических волчков, сравнивались с кривыми, полученными с использованием пары Лакса. Приведенные в диссертации примеры преобразований Беклунда сравнивались с уже известными. Однако поскольку большинство результатов, полученных в данной диссертации, являются новыми, их нельзя сравнить с результатами других авторов.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались на заседаниях Ученого совета Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, на семинарах по математической физике ИТФ им. Л.Д. Ландау РАН, Математического института им. В.А. Стеклова РАН, Института по атомной энергии CEA-Saclay (Франция), на Научных сессиях Совета РАН по нелинейной динамике (Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН), а также на конференциях: Optical Solitons: Theoretical Challenges and Industrial Perspectives: Les Houches Workshop (1998, Centre de Physique des Houches, Франция) , International Workshop on Solitons, Collapses, Turbulence: Developments and Perspectives (1999, ИТФ, Черноголовка, Россия),”Workshop on Classical and Quantum Integrability” (2000, University of Leeds, Великобритания), ”Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы"(2000, Институт Математики с ВЦ РАН, БГУ, Уфа, Россия), "Классические и квантовые интегрируемые системы" памяти М.В.Савельева (2001, 2003 Институт физики высоких энергий, г. Протвино, Россия).

Публикации. Диссертация выполнена на основе работ [M1]—[M21] из списка публикаций автора по теме диссертации — всего 21 статья. Все эти статьи опубликованы в рецензируемых журналах, входящих в международные базы данных Web of Science, Scopus и в перечень ВАК. Часть работ написана совместно. Вклад автора в приведённые в диссертации результаты является основным.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из Введения, 7 глав, Заключения и Списка литературы, который содержит 167 наименований. Общий объём — 220 страниц.

Содержание работы

Введение содержит описание полученных в диссертации результатов и оценку их значения для теории нелинейных интегрируемых систем.

Гл. 1 посвящена классическим квазиштеккелевым гамильтонианам.

В Разделе 1.2 изучается задача о парах коммутирующих гамильтонианов, квадратичных по импульсам, которая была, в частности, рассмотрена в работах [3, 29, 1, 30, 2].

Рассмотрим пару гамильтонианов вида

$$H = ap_1^2 + 2bp_1p_2 + cp_2^2 + dp_1 + ep_2 + f, \tag{1}$$

$$K = Ap_1^2 + 2Bp_1p_2 + Cp_2^2 + Dp_1 + Ep_2 + F, \tag{2}$$

коммутирующих относительно стандартной скобки Пуассона $\{p_\alpha, q_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}$. Коэффициенты в формулах (1),(2) - некоторые (локально) аналитические функции переменных q_1, q_2. Пусть s_1, s_2 являются корнями уравнения

$$\Phi(s, q_1, q_2) = (B - bs)^2 - (A - as)(C - cs) = 0, \tag{3}$$

Тогда, если якобиан точечного преобразования $(q_1, q_2) \to (s_1, s_2)$ не равен нулю, мы будем называть пару гамильтонианов H, K из формул (1),(2) *невырожденной*. Ключевой теоремой в этой Главе является Теорема (1.2), поэтому мы приводим ее здесь полностью:

Теорема 1.2. *Любая пара коммутирующих невырожденных гамильтонианов (1)-(2) может быть сведена с помощью точечного (определенного выше) и канонического преобразования*

$$\hat{P}_1 = P_1 + \frac{\partial F(s_1, s_2)}{\partial s_1}, \qquad \hat{P}_2 = P_2 + \frac{\partial F(s_1, s_2)}{\partial s_2}$$

к паре вида

$$H = \frac{U_1 - U_2}{s_1 - s_2}, \qquad K = \frac{s_2\, U_1 - s_1\, U_2}{s_1 - s_2}, \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} U_1 &= S_1(s_1) P_1^2 + \frac{\sqrt{S_1(s_1) S_2(s_2)} Z_{s_1}}{(s_1 - s_2)} P_2 - \frac{S_1(s_1) Z_{s_1}^2}{4(s_1 - s_2)^2} + V_1(s_1, s_2), \\ U_2 &= S_2(s_2) P_2^2 - \frac{\sqrt{S_1(s_1) S_2(s_2)} Z_{s_2}}{(s_1 - s_2)} P_1 - \frac{S_2(s_2) Z_{s_2}^2}{4(s_2 - s_1)^2} + V_2(s_1, s_2), \end{aligned} \tag{5}$$

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{S_1(s_1)}\,\partial_{s_1}\left(\sqrt{S_1(s_1)}\frac{Z_{s_1}^2}{s_1-s_2}\right)+f_1(s_1),\\
V_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{S_2(s_2)}\,\partial_{s_2}\left(\sqrt{S_2(s_2)}\frac{Z_{s_2}^2}{s_2-s_1}\right)+f_2(s_2),
\end{aligned} \tag{6}
$$

$$
Q=\frac{V_1-V_2}{s_1-s_2} \tag{7}
$$

для некоторых функций $Z(s_1, s_2)$, $S_i(s_i)$ *и* $f_i(s_i)$. *Гамильтонианы* H, K *(4) коммутируют относительно стандартной скобки Пуассона* $\{P_i, s_j\} = \delta_{i,j}$ *тогда и только тогда, когда*

$$
Z_{s_1,s_2}=\frac{Z_{s_1}-Z_{s_2}}{2(s_2-s_1)} \tag{8}
$$

и

$$
Z_{s_1}Q_{s_2}-Z_{s_2}Q_{s_1}=0. \tag{9}
$$

Пару гамильтонианов H и K, определяемую формулой (4), мы будем называть **квазиштеккелевыми гамильтонианами.** Условие того, что квазиштеккелевы гамильтонианы являются коммутирующими приведено в формулировке Теоремы (1.2).

Фиксируя значения коммутирующих гамильтонианов на поверхности уровня $H = h,\ K = k$, получаем следующие уравнения:

$$
P_1^2+aP_2+b=0,\qquad P_2^2+AP_1+B=0, \tag{10}
$$

где

$$
a=\frac{Z_x}{x-y}\sqrt{\frac{S_2(y)}{S_1(x)}},\qquad A=-\frac{Z_y}{x-y}\sqrt{\frac{S_1(x)}{S_2(y)}},
$$

$$
b=-\frac{Z_x^2}{4(x-y)^2}+\frac{V_1-hx+k}{S_1(x)},\qquad B=-\frac{Z_y^2}{4(x-y)^2}+\frac{V_2-hy+k}{S_2(y)}.
$$

Мы произвели замену $s_1 = x,\ s_2 = e$ для удобства.

Отметим, что если $Z(x, y) = 0$, то гамильтонианы становятся штеккелевыми и система (10) тривиально интегрируется.

В противном случае для решения системы можно применить метод "частичного разделения переменных." Для описания этого метода потребуется выполнить целый ряд простых, но необходимых для понимания этого метода выкладок.

В Разделе 1.4 выводится универсальная формула для решения уравнений Гамильтона–Якоби для квазиштеккелевых систем, а также алгебраическая кривая, описывающая динамику этих систем. Используя стандартную технику резольвент Лагранжа, сведем систему (10), эквивалентную алгебраическому уравнению степени 4, к системе

$$uv = \frac{1}{4}aA, \quad Au^3 + 4\frac{b}{a}u^2v - 4\frac{B}{A}uv^2 - av^3 = 0. \tag{11}$$

Пусть (u_k, v_k), $k = 1, 2, 3$ -решения системы (11), тогда формулы

$$\begin{array}{ll} P_1 = u_1 + u_2 + u_3, & P_2 = v_1 + v_2 + v_3; \\ P_1 = u_3 - u_1 - u_2, & P_2 = v_3 - v_1 - v_2; \\ P_1 = u_2 - u_1 - u_3, & P_2 = v_2 - v_1 - v_3; \\ P_1 = u_1 - u_2 - u_3, & P_2 = v_1 - v_2 - v_3 \end{array}$$

определяют четыре решения системы (10). Для определенности будем рассматривать первое из них.

Лемма 1.5 *Для* $i = 1, 2, 3$ *выполнены соотношения* $\frac{\partial u_i}{\partial y} = \frac{\partial v_i}{\partial x}$.

Лемма 1.5 означает, что в переменных u_1, u_2, u_3 происходит "частичное" разделение переменных. А именно, $V = V_1 + V_2 + V_3$, где V - искомая функция Гамильтона-Якоби, а функции V_i определяются из системы

$$\frac{\partial}{\partial x}V_i = u_i, \qquad \frac{\partial}{\partial y}V_i = v_i.$$

Положим

$$u = \frac{1}{2}\frac{Z_x}{x-y}\sqrt{\frac{y-\xi}{x-\xi}}, \qquad v = -\frac{1}{2}\frac{Z_y}{x-y}\sqrt{\frac{x-\xi}{y-\xi}}.$$

Легко видеть, что пара (u, v) для любого ξ удовлетворяет соотношению (11). Кроме того, нетрудно проверить, что если Z удовлетворяет (8), то $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$. Пользуясь этим фактом, введем функцию $\sigma(x, y, \xi)$, такую что

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = u, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial y} = v.$$

Положим $Y = \dfrac{\partial \sigma}{\partial \xi}$.

С точностью до несущественного множителя второе уравнение из (11) может быть записано в виде

$$\begin{gathered} \Psi(x, y, \xi; h, k) = -k + h\xi + \\ + \frac{y-\xi}{x-y}\Big(V_1 - \frac{S_1(x)Z_x^2}{4(x-\xi)(x-y)}\Big) - \frac{x-\xi}{x-y}\Big(V_2 + \frac{S_2(y)Z_y^2}{4(y-\xi)(x-y)}\Big). \end{gathered} \tag{12}$$

Предложение 1 Пусть выполнены соотношения (8), (9). Тогда выражение (12) является функцией переменных Y и ξ.

Согласно Предложению 1, соотношение $\Psi(x, y, \xi; h, k) = 0$ может быть записано в виде $\phi(\xi, Y, h, k) = 0$. Для практического нахождения функции ϕ полезно положить $y = x$ или $x = 0$. После этого выражение $Y(x, y, \xi; h, k)$ значительно упрощается, и функция $\Psi(x, x, \xi; h, k)$ легко выражается через ξ и $Y(x, x, \xi; h, k)$.

Уравнение

$$\phi(\xi, Y; h, k) = 0 \tag{13}$$

задает кривую, в терминах дифференциалов на которой выражается функция Гамильтона-Якоби V.

Обозначим через $\xi_k(x, y; h, k)$, где $k = 1, 2, 3$, корни кубического уравнения $\Psi(x, y, \xi; h, k) = 0$.

Теорема 1.7. Функция Гамильтона -Якоби V имеет вид

$$V(x, y; h, k) = \sum_{k=1}^{3} \Big(\sigma(x, y, \xi_k(x, y; h, k)) - \int^{\xi_k} Y(\xi)\, d\xi \Big), \tag{14}$$

где $Y(\xi)$ - алгебраическая функция на кривой $\phi(\xi, Y) = 0$.

Определяющие уравнения на функцию V:

$$H(x, y, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}) = h, \quad K(x, y, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}) = k. \tag{15}$$

Тогда

$$\frac{\partial V}{\partial x} = P_1, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = P_2, \quad \frac{\partial V}{\partial h} = t - t_0, \quad \frac{\partial V}{\partial k} = \tau - \tau_0. \tag{16}$$

Это представление мы будем называть "частичным" разделением переменных, поскольку все величины зависят от 3-х переменных $\xi_k(x, y)$, определяемых из уравнения (12), и от самих переменных x, y.

Для нахождения явного решения необходимо найти обратное преобразование Якоби следующей системы

$$\begin{cases} t - t_0 = \int\limits_{\xi_0}^{\xi_1} \Omega_1(\xi) + \int\limits_{\xi_0}^{\xi_2} \Omega_1(\xi) + \int\limits_{\xi_0}^{\xi_3} \Omega_1(\xi), \\ \tau - \tau_0 = \int\limits_{\xi_0}^{\xi_1} \Omega_2(\xi) + \int\limits_{\xi_0}^{\xi_2} \Omega_2(\xi) + \int\limits_{\xi_0}^{\xi_3} \Omega_2(\xi), \\ \mathrm{Alg}(Y_1, Y_2, Y_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3; h, k) = 0, \end{cases} \tag{17}$$

где

$$\Omega_1 = \frac{\partial\phi/\partial h}{\partial\phi/\partial Y}\, d\xi, \quad \Omega_2 = \frac{\partial\phi/\partial k}{\partial\phi/\partial Y}\, d\xi.$$

Последняя строчка в системе (17) означает некоторое алгебраическое условие. Например, если можно найти такую переменную $\eta = a(x,y)\xi + b(x,y) = g(\xi, Y)$, тогда пары точек $(\xi_1,\eta_1), (\xi_2,\eta_2), (\xi_3,\eta_3)$ лежат на одной прямой.

В Разделе 1.5 представлена классификация квазиштеккелевых гамильтонианов В Разделе 1.6 приводятся примеры классических волчков, связанных с квазиштеккелевыми гамильтонианами.

Приведем в качестве примера волчок Клебша на $e(3)$: Рассмотрим гамильтониан и дополнительный интеграл волчка Клебша

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) + \frac{1}{2}(\lambda_1\gamma_1^2 + \lambda_2\gamma_2^2 + \lambda_3\gamma_3^2), \\ K &= (\lambda_1 M_1^2 + \lambda_2 M_2^2 + \lambda_3 M_3^2) - \lambda_1\lambda_2\lambda_3\Big(\frac{\gamma_1^2}{\lambda_1} + \frac{\gamma_2^2}{\lambda_2} + \frac{\gamma_3^2}{\lambda_3}\Big), \end{aligned} \tag{18}$$

где λ_i- произвольные параметры. Функции H и K коммутируют относительно линейных скобок Пуассона алгебры e(3)

$$\{M_i, M_j\} = e_{ijk}M_k, \quad \{M_i, \gamma_j\} = e_{ijk}\gamma_k, \quad \{\gamma_i,\gamma_j\} = 0.$$

Зафиксируем значения функций Казимира этих скобок:

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = \alpha^2, \qquad M_1\gamma_1 + M_2\gamma_2 + M_3\gamma_3 = l.$$

Тогда формулы

$$\begin{aligned} M_1 &= -p_1q_1q_2 + \frac{1}{2}p_2(q_1^2 - q_2^2 - 1) + \frac{l\,x}{2\alpha}\frac{(q_1^2+q_2^2+1)}{(q_1^2+q_2^2)}, \\ M_2 &= \frac{1}{2}p_1(q_1^2 - q_2^2 + 1) + p_2q_1q_2 + \frac{l\,y}{2\alpha}\frac{(q_1^2+q_2^2+1)}{(q_1^2+q_2^2)}, \\ M_3 &= p_1q_2 - p_2q_1, \\ \gamma_1 &= \frac{2\alpha q_1}{(q_1^2+q_2^2+1)}, \quad \gamma_2 = \frac{2\alpha q_2}{(q_1^2+q_2^2+1)}, \quad \gamma_3 = \frac{\alpha(q_1^2+q_2^2-1)}{(q_1^2+q_2^2+1)} \end{aligned} \tag{19}$$

задают вещественные координаты Дарбу (p_1,p_2,q_1,q_2) на симплектическом листе общего положения.

Подставляя (19) в (18) и используя результаты теоремы 1.2, получаем:

$$\begin{aligned} S(x) &= -2(x-2\lambda_1)(x-2\lambda_2)(x-2\lambda_3), \quad Z(x,y) = i\frac{l}{\alpha}(x+y), \\ f(x) &= -\frac{\alpha^2}{4}x^2 + \frac{\alpha^2}{2}x(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3). \end{aligned} \tag{20}$$

Наличие мнимой единицы в выражении для $Z(x, y)$ из (20) приводит к необходимости сделать замену

$$i\sqrt{S(x)S(y)} \to \sqrt{-S(x)S(y)}.$$

При этом легко видеть, что все коэффициенты в гамильтониане и дополнительном интеграле являются вещественными при условии, что переменные s_1, s_2 находятся в «правильных» промежутках между корнями многочлена S (полиномы $S(s_1)$ и $S(s_2)$ должны иметь разные знаки в силу динамики системы).

Следуя схеме Раздела 1.4, получаем

$$\sigma(x, y, \xi) = \frac{l}{\alpha} \arctan(\frac{\sqrt{x-\xi}}{\sqrt{\xi - y}}), \quad Y = \frac{\partial}{\partial \xi}\sigma = -\frac{l}{2\alpha}\frac{1}{\sqrt{x-\xi}\sqrt{\xi-y}}. \tag{21}$$

Используя (12), мы вычисляем соответствующую алгебраическую кривую рода 3:

$$\phi(\xi, Y) \cong S(\xi)Y^4 + (f(\xi) - h\xi + k)Y^2 - \frac{l^2}{16} = 0. \tag{22}$$

Отметим, что алгебраическая кривая (22) совпадает с кривой, полученной Переломовым из 3×3 пары Лакса для волчка Клебша [31]. Изложенный выше метод позволяет строить алгебраические кривые без использования пары Лакса.

Введем новую переменную

$$\eta = \frac{l^2}{4\alpha^2 Y^2} + \xi^2 = (x+y)\xi - xy. \tag{23}$$

Последнее равенство означает, что пары точек $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), (\xi_3, \eta_3)$ лежат на одной прямой.

Введем обозначения

$$\tilde{l} = \frac{l}{\alpha^2},\ \tilde{h} = \frac{h}{\alpha^2},\ \tilde{k} = \frac{k}{\alpha^2},\ I_1 = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\ I_2 = \lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1,\ I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3,$$

тогда, выражая переменную Y из (23) и подставляя в (22), получаем кубику

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\xi, \eta) = 2(\tilde{l}^2 + I_1 - 2\tilde{h})\xi^3 - \xi^2\eta - 4(\tilde{l}^2 I_1 - \tilde{k})\xi^2 - \\ - 2(I_1 - 2\tilde{h})\xi\eta + \eta^2 + 8\tilde{l}^2 I_2\xi - 4\tilde{k}\eta - 16\tilde{l}^2 I_3 = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

- кривую рода 1.

В Разделе 1.8 рассматриваются трехкомпонентные квазиштеккелевы гамильтонианы Переформулируем Утверждение 1.16 следующим образом:

Семейство трехкомпонентных квазиштеккеевых гамильтонианов имеет вид

$$h(\alpha) = \sum_{k=1}^{3} \Big(S(q_k) p_k^2 + \sum_{i=1}^{3} z_{k,i}(\vec{q}) p_i + u_k(\vec{q}) \Big) \prod_{j \neq k} \frac{\alpha - q_j}{q_k - q_j}, \quad \{h(\alpha), h(\beta)\} = 0, \tag{25}$$

где

$$\begin{aligned} &S(x) = a^2(x), \quad z_{i,j}(\vec{q}) = -\delta \frac{a(q_i)a(q_j)}{q_i - q_j},\ i \neq j,\ z_{i,i}(\vec{q}) = 0, \\ &a(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \end{aligned} \tag{26}$$

$$u_1(\vec{q}) = u(q_1, q_2, q_3),\ u_2(\vec{q}) = u(q_2, q_3, q_1),\ u_3(\vec{q}) = u(q_3, q_1, q_2)$$

и

$$u(x, y, z) = -\frac{\delta^2}{4} \Big(3S(x) \big(\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(x-z)^2} \big) - S'(x) \big(\frac{1}{x-y} + \frac{1}{x-z} \big) + \frac{1}{5} S''(x) \Big).$$

Тогда $h(\alpha) = h_0 \alpha^2 + h_1 \alpha + h_2$, и мы получаем три гамильтониана h_0, h_1, h_2 в инволюции, т.е системы интегрируемые по Лиувиллю.

В случае когда $a(x)$ - квадратичный полином, с помощью канонического преобразование можно исключить потенциал:

$$h(\alpha) = \sum_{k=1}^{3} \prod_{j \neq k} \frac{\alpha - q_j}{q_k - q_j} \Big(a^2(q_k) p_k^2 + a(q_k) \delta \sum_{i \neq k} \big(\frac{a(q_k)}{q_k - q_i} p_k - \frac{a(q_i)}{q_k - q_i} p_i \big) \Big). \tag{27}$$

В Гл. 2 в Разделе 2.1 доказана теорема 2.1, аналогичная теореме 1.2, сформулированной выше. Уравнения в этой теореме имеют квантовые поправки. Особое место в квантовом случае занимает класс квазиштеккелевых гамильтонианов, соответствующих двумерному уравнению Шредингера с дополнительным интегралом, квадратичным по операторам импульса. Получен общий вид точечного обратимого преобразования к квазиштеккелевым гамильтонианам, зависящего от 3-х параметров, которые связаны одним алгебраическим соотношением. Показано, что в случае уравнения Шредингера одна из определяющих функций $S(x)$ всегда является полиномом 2-ой степени. Этот факт позволяет провести полную классификацию соответствующих пар квазиштекккелевых гамильтонианов в этом классе. Как результат получено "общее" решение, а также 5 изолированных решений.

Пусть гамильтониан и дополнительный интеграл в главном приближении имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{H} &= a_1(q_1, q_2)\hat{p}_1^2 + 2b_1(q_1, q_2)\hat{p}_1\hat{p}_2 + c_1(q_1, q_2)\hat{p}_2^2 + .., \\ \hat{K} &= a_2(q_1, q_2)\hat{p}_1^2 + 2b_2(q_1, q_2)\hat{p}_1\hat{p}_2 + c_2(q_1, q_2)\hat{p}_2^2 + .., \end{aligned} \tag{28}$$

где $\hat{p}_i = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q_i}$.

Уравнению Шредингера соответствует выбор:

$$a_1(q_1, q_2) = 1,\ b_1(q_1, q_2) = 0,\ c_1(q_1, q_2) = 1,$$

$$a_2(q_1, q_2) = q_2^2 + \mu^2, \quad b_2(q_1, q_2) = -q_1 q_2 + \kappa, \quad c_2 = q_1^2 + \nu^2. \tag{29}$$

Тогда полином 2-ой степени $S(x) = 4(t - x_1)(t - x_2)$ определяется своими корнями

$$x_1 = \nu^2 - \lambda^2,\ x_2 = \lambda^2 + \mu^2,\ \kappa^2 = \lambda^2(\mu^2 - \nu^2 + \lambda^2). \tag{30}$$

Полная классификация:

I. Решение с двумя корнями $S(x) = 4(x - x_1)(x - x_2)$

$$\begin{aligned} &Z(x, y) = (\delta - \frac{1}{2}(z_1 + z_2))(x + y) + \frac{1}{2}z_m(x - y)^2(x + y) + z_c(x - y)^2 + \\ &+ z_1\sqrt{x - x_1}\sqrt{y - x_1} + z_2\sqrt{x - x_2}\sqrt{y - x_2}, \\ &f(x) = -4z_m^2 x^2 S(x) + 4z_m x^2(z_1 + z_2 - 2\delta) - \\ &- 16z_c x^2(2z_m(x - x_1 - x_2) + z_c) - \frac{z_1^2}{4}\frac{x_1 - x_2}{x - x_1} - \frac{z_2^2}{4}\frac{x_2 - x_1}{x - x_2}. \end{aligned} \tag{31}$$

II. Решение с одним корнем

$$Z(x, y) = (x + y)(\delta - \frac{z}{2}) + z\sqrt{x}\sqrt{y}, \quad S(x) = 4(x - x_1)(x - x_2), \tag{32}$$

1. $z = 0$,

$$f(x) = f_2 x^2.$$

2. $z = \delta,\ x_1 = 0$

$$f(x) = f_m\sqrt{x} + \frac{\delta^2}{4x}x_2.$$

3. $z = \delta,\ \delta = \pm i\hbar$

$$f(x) = f_m\sqrt{x} + \hbar^2\frac{x_1x_2}{2x^2} - \frac{\hbar^2}{4x}(x_1+x_2).$$

4. $z = 2\delta,$

$$f(x) = \frac{f_m}{x} - \frac{x_1x_2}{4x^2}(3\hbar^2 + 8\delta^2).$$

5. $z = 2\delta \pm i\hbar,$

$$f(x) = -(2\delta \pm i\hbar)^2(\frac{x_1x_2}{2x^2} - \frac{x_1+x_2}{4x}).$$

Рассмотрим два случая из общей классификации:

1. пример 1 случай I $z_2 = 0, z_1 = \delta, \delta \to -i\delta,$

$$\mu = 0,\ \nu = 0,\ \kappa = 0,\ q_m = \frac{\hbar}{a^4},\ \delta = k\,\hbar,\ q_c = \frac{\hbar}{4a^2}\epsilon,\ E = \frac{\hbar^2}{2ma^2}\lambda.$$

2. пример 2 случай II-4 $\delta \to i\delta$

$$\mu = a,\ \nu = a,\ \kappa = 0,\ f_m = \frac{1}{2}\hbar^2a^2(3+\epsilon),\ \delta = k\,\hbar,\ E = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}\chi^2,$$

   где a - параметр размерности длины, а параметры $k,\ \epsilon,\ \lambda\ \chi,$ - безразмерны, причем, как будет показано, k - целое число, параметр λ—новый энергетический параметр.

Для того, чтобы привести рассмотренные примеру к виду уравнения Шредингера со всеми размерными параметрами, необходимо сделать следующие преобразования:

$$H_S = \frac{H}{2m}, \quad u_S = \frac{u}{2m}, \quad A_x = \frac{c}{e}A_1, \quad A_y = \frac{c}{e}A_2, \tag{33}$$

где H_S - оператор Шредингера, а u_S - потенциал. Далее мы будем опускать индекс S.

В Разделе 2.2. получены два новых примера уравнения Шредингера с ненулевым магнитным полем, относящиеся к классу "квазиточно решаемых" задач. Эти примеры проинтегрированы в терминах функций Гойна. Определение дискретного спектра и волновых функций сведено к решению алгебраического уравнения, которое может быть проделано численно, что и означает термин "квазиточно решаемые" задачи.

Рассмотрим оператор Шредингера в следующей форме:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + u(r,\phi), \quad \hat{H}\psi = E\psi, \tag{34}$$

Пример 1. Отталкивающий потенциал

$$A_\phi = \frac{c\hbar}{2e\,a^2}\,r\left(\epsilon + 3\frac{r^2}{a^2}\right),\ A_r = 0,\ u = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}\left(2\frac{r^6}{a^6} + \epsilon\frac{r^4}{a^4} + 2k\frac{r^2}{a^2}\right), \tag{35}$$

энергия и магнитное поле имеют вид:

$$E = \frac{\hbar^2}{2ma^2}\lambda, \quad B = \frac{c\hbar}{ea^2}(\epsilon + 6\frac{r^2}{a^2}). \tag{36}$$

Волновая функция:

$$\psi = e^{-\frac{r^4}{8a^4}}e^{-\epsilon\frac{r^2}{4a^2}}r^l e^{\pm il\phi}\,\mathrm{HeunB}(l,\epsilon,\pm 3l + 2k, \mp\epsilon l - \lambda, \frac{r^2}{2a^2}). \tag{37}$$

Пример 2. Нерациональный случай

$$A_\phi = -\frac{c\hbar}{e}\,k\frac{a}{r\sqrt{r^2+a^2}},\ A_r = 0,\ u = \frac{\hbar^2}{8ma^2}\left(\frac{3a^4}{(r^2+a^2)^2} - \epsilon\frac{a^2}{r^2+a^2}\right). \tag{38}$$

Энергия и магнитное поле

$$E = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}\chi^2, \quad B = k\frac{c\hbar}{e}\frac{a}{(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{39}$$

Полный поток через всю плоскость квантуется $\Phi = k\frac{2\pi\hbar c}{e}$.

Используем замену переменных

$$t = \frac{1}{2a}(a + \sqrt{r^2+a^2}). \tag{40}$$

Волновая функция:

$$\begin{gathered}\psi = e^{il\phi}(2t-1)^{\frac{1}{2}}\,t^{\pm\frac{k-l}{2}}(t-1)^{\frac{k+l}{2}}e^{2\chi t}\times \\ \times\,\mathrm{HeunC}(4\chi, \pm(k-l), k+l, 0, \frac{1}{2}(k^2-l^2) + \frac{1}{4}(\epsilon+1) - \chi^2, t).\end{gathered} \tag{41}$$

Условие полиномиальности функций HeunB, HeunC представляет из себя пару алгебраических уравнений и полностью определяет дискретный спектр в обоих примерах. Необходимо также учесть регулярность волновых функций в точке $r = 0$.

В Гл. 3 рассмотрены пары коммутирующих дифференциальных операторов, связанных с квантовыми волчками. В Разделе 3.3 приведены квантовые аналоги интегрируемых волчков, таких как волчки Клебша, Ковалевской, случай Горячева–Чаплыгина на алгебре $e(3)$, а в Разделе 3.2 — волчки Шоттки–Манакова, Стеклова, М. Адлера–ван Мёрбеке, Соколова на алгебре $so(4)$. Квантование, по крайней мере, последних двух волчков является новым. В результате квантования, добавляются соответствующие квантовые поправки в гамильтониан и дополнительный интеграл этих волчков. Показано, что в ряде случаев можно к квадратичной части волчка добавить некоторую линейную часть. Генераторы соответствующих алгебр представлены в виде дифференциальных операторов первого порядка — аналогов координат Дарбу. При подстановке дифференциального представления этих генераторов в гамильтониан и в соответствующий дополнительный интеграл этих волчков, получается пара коммутирующих дифференциальных операторов.

Рассмотрим класс дифференциальных операторов, связанный с квантовыми волчками на $so(4)$ и $e(3)$. Соответствующий оператор $\hat{H}$ имеет весьма специальный вид

$$\hat{H} = a(x)D_x^2 + 2f(x,y)D_xD_y + b(y)D_y^2 + \dots, \tag{42}$$

где a, b многочлены четвёртой степени, $f(x,y)$ биквадратичный многочлен, многоточие обозначает младшие члены также со специальными коэффициентами. Такой вид следует из того, что в генераторах алгебры Ли гамильтониан квадратичен, а генераторы линейны по производным (см. ниже), например, на $so(4)$ имеем

$$\hat{H} = (\hat{U}, A\hat{U}) + (\hat{V}, B\hat{V}) + 2(\hat{U}, F\hat{V}) + (\vec{c}, \hat{U}) + (\vec{d}, \hat{V}). \tag{43}$$

Схема связи рассматриваемых способов квантования

$$\begin{array}{ccc}
\{H,K\} = 0 & \xrightarrow{\text{квантование на алгебре Ли}} & [\hat{H},\hat{K}] = 0 \\
R^* \big\downarrow & & \big\downarrow \hat{R}^* \\
\{H_D, K_D\} = 0 & \xrightarrow{\text{квантование в переменных Дарбу}} & [\hat{H}_D, \hat{K}_D] = 0
\end{array}$$

Здесь R обозначает представление скобки Ли–Пуассона в переменных Дарбу, H_D образ гамильтониана H при двойственном отображении, то есть $H_D = R^*(H) = H \circ R$. Аналогично, $\hat{R}$ обозначает представление алгебры Ли дифференциальными операторами, и $\hat{H}_D = \hat{R}^*(\hat{H}) = \hat{H} \circ \hat{R}$. Горизонтальные стрелки заключаются в переходе от скобки Ли–Пуассона к коммутатору на алгебре Ли и в переходе от скобки Пуассона–Дарбу к алгебре Гейзенберга

$$\{p_i, x_j\} = \delta_{ij} \quad \to \quad [D_{x_i}, x_j] = \delta_{ij}.$$

Рассмотрим алгебру $so(3)$ При квантовании мы переходим к операторной алгебре

$$[\hat{U}_i, \hat{U}_j] = i\varepsilon_{ijk}\hat{U}_k, \quad (\hat{U}, \hat{U}) = j_1(j_1+1), \tag{44}$$

допускающей представление дифференциальными операторами

$$\hat{U}_1 = -\frac{1}{2}(x^2-1)D_x + j_1 x, \quad \hat{U}_2 = -\frac{i}{2}(x^2+1)D_x + ij_1 x,$$
$$\hat{U}_3 = -xD_x + j_1. \tag{45}$$

Алгебра Ли $so(4) \simeq so(3) \oplus so(3)$ реализуется как прямая сумма с дублем, в котором сделаны переобозначения

$$U \to V, \quad x \to y, \quad p_1 \to p_2, \quad s_1 \to s_2, \quad \hat{U} \to \hat{V}, \quad D_x \to D_y, \quad j_1 \to j_2.$$

Подстановка генераторов алгебры $so(4)$ в гамильтониан (43) приводит для любого интегрируемого волчка (классические случаи, перечисленные ранее) на $so(4)$ к виду (42) в главном приближении, причем выполняется необходимое условие интегрируемости (Раздел 3.5)

$$f(x,y)^2 - a(x)b(y) = w(x,y)\tilde{w}(x,y), \tag{46}$$

с некоторыми многочленами $w, \tilde{w}$.

В Гл. 4 исследуется метод получения преобразования Беклунда лагранжевых систем, заключающийся в инвариантности вариации действия до и после применения преобразования Беклунда. В Разделе 4.1 рассмотрены так называемые $u-v$ системы типа нелинейного уравнения Шредингера. Получено их преобразование к гамильтоновой форме с канонической скобкой Пуассона.

Здесь мы будем обозначать символами $\mathcal{H}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$ – гамильтониан, лагранжиан и производящую функцию канонического преобразования соответственно, а символами H, L, F – плотности соответствующих величин. В тех местах текста, где это не может привести к недоразумению, мы будем использовать выражение "гамильтониан" вместо "плотность гамильтониана" и.т.п.

В Разделе 4.2 получена производящая функция канонического преобразования, не меняющего вариацию гамильтонианов при применении преобразования Беклунда, что эквивалентно сохранению вариации действия. Получены производящие функции для ряда примеров таких, как дивергентные системы, уравнение Ландау–Лифшица, уравнения КдФ, уравнения Кричевера–Новикова и других систем. Интересно, что такие уравнения как КдФ и уравнение Кричевера–Новикова удалось записать в лагранжевом виде. Рассмотрим лагранжеву систему с действием $\mathcal{S}$. Пусть функция $u(x,t)$ является решением соответствующего уравнения Эйлера–Лагранжа, т.е. $\delta\mathcal{S}[u]=0$. Определим преобразование Беклунда такое, что $\delta\mathcal{S}[\hat{u}]-\delta\mathcal{S}[u]=0\Rightarrow\delta\mathcal{S}[\hat{u}]=0$. Рассмотрим примеры.

1. Каноническая скобка Пуассона Действие выберем в виде

$$\mathcal{S}=\int dt\int dx(pq_t-H).$$

Если $\delta\int dt\int dx(\hat{p}\hat{q}_t-pq_t)=0$, то преобразование $(p,q)\to(\hat{p},\hat{q})$ определяется с помощью производящей функции канонического преобразования $\mathcal{F}[q,\hat{q}]$:

$$p=\frac{\delta\mathcal{F}[q,\hat{q}]}{\delta q},\quad \hat{p}=-\frac{\delta\mathcal{F}[q,\hat{q}]}{\delta\hat{q}}. \tag{47}$$

Гамильтонова система

$$q_t=\frac{\delta\mathcal{H}[p,q]}{\delta p},\quad p_t=-\frac{\delta\mathcal{H}[p,q]}{\delta q}. \tag{48}$$

Определение 4.2 Функция $\mathcal{F}[q,\hat{q}]=\mathcal{F}(q,q_x,\hat{q},\hat{q}_x)$ называется производящей функцией *канонического преобразования Беклунда* для динамической системы (48), если существует функция $\sigma[q,\hat{q}]$, такая что

$$\hat{H}[\hat{p},\hat{q}]-H[p,q]=\frac{d}{dx}\sigma[q,\hat{q}], \tag{49}$$

где p, $\hat{p}$ определены формулами (47), либо в общем случае выполнено соотношение

$$\delta(\hat{\mathcal{H}}[\hat{p},\hat{q}]-\mathcal{H}[p,q])=0. \tag{50}$$

В силу этого определения и формул

$$p_n=\frac{\delta\mathcal{F}[q_n,q_{n+1}]}{\delta q_n}=-\frac{\delta\mathcal{F}[q_{n-1},q_n]}{\delta q_n}\quad\Rightarrow\quad\frac{\delta\mathcal{F}[q_n,q_{n+1}]}{\delta q_n}+\frac{\delta\mathcal{F}[q_{n-1},q_n]}{\delta q_n}=0$$

производящая функция приводит нас к лагранжевой форме цепочки и задает плотность $F[q_n, q_{n+1}]$ лагранжиана:

$$\delta \int dx \sum_n F[q_n, q_{n+1}] = 0. \tag{51}$$

Пример. Система Леви с гамильтонианом

$$H = -pq_{xx} + pq_x^2 + p^2 q_x$$

имеет следующую производящую функцию канонического преобразования Беклунда

$$F = \hat{q}_x \log(\hat{q}_x) - q_x \log(\alpha e^{\hat{q}-q} + \beta) + \delta e^{\hat{q}-q}.$$

При $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \delta = 1$ получаем лагранжиан цепочки Вольтерры (51), в общем случае - лагранжиан релятивистской цепочки Вольтерры.

Рассмотрим лагранжианы вида

$$\mathcal{L} = \int dx \left(q_t\, q_x^\alpha - H(q, q_x, \dots)\right). \tag{52}$$

Оказывается, что $\alpha = \pm 1$. В случае $\alpha = 1$ Получаем системы КдФ, гиперболические системы и др. При $\alpha = -1$ получаем уравнение Кричевера–Новикова.

В Разделе 4.3 впервые получено преобразование Беклунда для уравнения Цицейки, содержащее только полевые переменные и их производные по координатам.

$$\phi_{x,t} = e^{-2\phi} - e^{\phi} \iff \delta S = 0, \quad S = \int dx\, dt\, [\phi_x \phi_t - H(\phi)], \quad H(\phi) = 2e^{\phi} + e^{-2\phi}.$$

Каноническое преобразование Беклунда в этом случае имеет вид

$$b = \frac{\delta \mathcal{F}[A]}{\delta A}, \tag{53}$$

где $A = \hat{\phi} - \phi,\ B = \hat{\phi} + \phi,\ a = \hat{\phi}_x - \phi_x,\ b = \hat{\phi}_x + \phi_x$.

Ищем преобразование Беклунда в наиболее простой форме, возможной в данном случае

$$F = \int dx\, f(a, A) \iff b = f_A - a_x f_{aa} - a f_{aA}. \tag{54}$$

Каноническое преобразование (54) является ПБ в том и только в том случае, если

$$h(\hat{\phi}) - h(\phi) = 2e^{B/2}g'(A) - e^{-B}g'(A)g(A) = \partial_x W(a, A, B),$$
$$g(A) = e^{A/2} + e^{-A/2}. \tag{55}$$

Можно удовлетворить (55) и найти производящую функцию $F(a, A)$ при условиях, что:

$$\partial_x[e^{B/2}Z(a, A)] = -e^{B/2}g'(A), \quad \partial_x[e^{-B}R(a, A)] = -e^{-B}g'(A)g(A).$$

Первое условие дает

$$f_a = 2\log Z, \quad f_A = -2\frac{g'(A)}{Z} \Rightarrow g'(A)Z_a - Z_A Z = 0 \iff g(A) + aZ = s(Z).$$

Второе определяет неизвестную функцию $s(Z)$:

$$s(Z) = \nu Z^3, \quad R = -\frac{g(A)^2}{\nu Z^2}.$$

Итак, находим $Z(a, A)$ из кубического уравнения $\nu Z^3 = g(A) + aZ$, интегрируем уравнение $f_a = 2\log Z$ и находим плотность производящей функции ПБ $f(a, A)$.

Или:

$$-\frac{b}{2}Z = Z_x + g'(A), \quad Z_x = aZ_A + a_x Z_a, \quad Z(a, A) : \ \nu Z^3 = a\, Z + g(A).$$

Преобразование Беклунда уравнения Цицейки в довольно громоздкой форме было получено в работе [32]. По-видимому, это преобразование не приводится к ПБ, полученным выше. Полученная в данной Главе форма ПБ для уравнения Цицейки является новым примером в форме (53).

В Разделе 4.4 построена треугольная решетка преобразований Беклунда для систем типа нелинейного уравнения Шредингера, Приведем здесь наиболее интересную решетку такого типа — решетку ПБ модели Ландау–Лифшица в спиновой форме:

$$\vec{W}_x = [\vec{W} \times \hat{h}\vec{S}], \quad \vec{W}_t = [\vec{W} \times (\hat{h}[\vec{S} \times \vec{S}_x] + det(\hat{h})\hat{h}^{-}\vec{S})],$$
$$\vec{S} = \vec{S}(q_{n+1,m}, q_{nm}), \quad \vec{W} = \vec{S}(q_{n,m+1}, q_{n+1,m-1}), \tag{56}$$

а также определим вектор $\vec{S}$:

$$\vec{S}(\hat{q}, q) = (S_x, S_y, S_z) = (\frac{q\hat{q} - 1}{\hat{q} - q}, i\frac{q\hat{q} + 1}{\hat{q} - q}, \frac{\hat{q} + q}{\hat{q} - q}). \tag{57}$$

Заметим, что функция q_{nm} расположена в точке $(n, \frac{\sqrt{3}}{2}m)$ правильной треугольной решетки.

Диагонализуем тензор $\hat{h}$: $\hat{h} = diag(h_1, h_2, h_3)$

и введем диагональный тензор $\hat{J} = diag(J_1, J_2, J_3)$.

Поскольку мы выписали уравнение на динамику по x и t, то систему (56) можно рассматривать как пару Лакса для модели Ландау-Лифшица; условие согласования этой пары дает обычное уравнение Ландау-Лифшица:

$$\vec{S}_t = [\vec{S} \times (\vec{S}_{xx} + \hat{J}\vec{S})], \tag{58}$$

при условии $h_i^2 - h_j^2 = J_j - J_i$.

В Разделе 4.5 Изучены все преобразования Беклунда интегрируемых случаев системы Дэви–Стюартсона. Комбинируя эти преобразования и используя преобразования Миуры, переводящие 2-мерную цепочку Тоды в 2-мерную цепочку Вольтерры и далее в 2-мерную цепочку Гейзенберга, построена трехмерная октаэдрическая решетка преобразований Беклунда в виде уравнений Хироты. Одно из этих уравнений совпадает со знаменитым чисто дискретным уравнением Хироты:

$$\tau_{k+1,l,m}\tau_{k-1,l,m} - \tau_{k,l+1,m}\tau_{k,l-1,m} = \tau_{k,l,m+1}\tau_{k,l,m-1}. \tag{59}$$

Остальные уравнения решетки довольно громоздки, и мы отсылаем читателя к тексту диссертации.

В Гл. 5 исследуется синтез метода одевания и разделения переменных в двумерном случае, а именно: одевание гамильтониана, в котором переменные изначально разделены, приводит к интегрируемому гамильтониану, в котором разделения переменных уже нет. Метод применен к одной известной задаче, решение которой было ранее получено путем цепочки нетривиальных манипуляций. Применение метода одевания (точнее раздевания гамильтониана, в котором нет разделения переменных до гамильтониана, где это разделение появляется) в этом случае, позволяет легко найти ответ. Подход обобщен до общего случая квадратичных по операторам импульсов гамильтониана. Метод применен для операторов типа операторов Шредингера с магнитным полем. В Разделе 5.1 исследован случай, когда одевающий оператор имеет вид $S = \partial_x - \partial_y$. В Разделе 5.2 рассмотрено одевание уравнения Эйлера–Дарбу.

В разделе 5.4 исследуются системы типа уравнения Шредингера. Мы используем обычный вид одевания:

$$\hat{H}S = SH. \tag{60}$$

Рассмотрим одевание, соответствующее системам типа уравнения Шредингера с магнитным полем:

$$H = t(x,y)h, \quad h = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + u_1(x) + u_2(y)). \tag{61}$$

Оператор S мы выбираем в виде

$$S = \frac{1}{T(x,y)}(\partial_x + \phi(x,y)\partial_y + f(x,y)). \tag{62}$$

Здесь $T(x,y), \phi(x,y), f(x,y)$ – произвольные функции, причем $T(x,y)$ – чисто калибровочная функция и выбирается из соображения удобства. Оператор S является наиболее общим двумерным линейным оператором, в чем и состоит основное отличие от цитируемых выше работ [13],[33], где оператор одевания соответствует случаю $\phi = \pm i$. Поэтому для того чтобы сохранить вещественность преобразований, мы вынуждены выбрать одеваемый и одетый гамильтониан в виде, где оператор импульса заменяется на обычную производную $-i\nabla \to \nabla$, а значит, мы будем говорить не об уравнении Шредингера, а об одевании оператора типа Шредингера.

Оператор $\hat{H}$ после одевания:

$$\hat{H} = t(x,y)\hat{h}, \quad \hat{h} = ((\partial_x - A_1(x,y))^2 + (\partial_y - A_2(x,y))^2 + U(x,y)). \tag{63}$$

Отметим, что введение функции $t(x,y)$ расширяет класс операторов одевание, однако, при $t \neq 1$, одевание происходит только для волновых функций с нулевым собственным значением операторов h, $\hat{h}$.

В этом случае получаем:

$$u_1(x) = \frac{1}{2}\frac{F''(x)}{F(x)} - \frac{3}{4}\frac{F'^2(x)}{F^2(x)} - \mu^2 F(x)^2, \quad u_2(y) = \frac{1}{2}\frac{G''(y)}{G(y)} - \frac{3}{4}\frac{G'^2(y)}{G^2(y)} - \mu^2 G(y)^2.$$

Волновая функция $\psi(x,y) = \psi_1(x)\psi_2(y)$ (нулевое собственное значение)

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{F(x)}}(a_1 e^{\mu\int dx\, F(x)} + a_2 e^{-\mu\int dx\, F(x)}),$$
$$\psi_2(y) = \frac{1}{\sqrt{G(y)}}(b_1 e^{\mu\int dy\, G(y)} + b_2 e^{-\mu\int dy\, G(y)}).$$

Одетая волновая функция $\hat{\psi}$:

$$\hat{\psi} = S\psi = \frac{2\mu}{\sqrt{F(x)}\sqrt{G(y)}}(a_1 b_1 e^{\mu(\int dx\, F(x) + \int dy\, G(y))} - a_2 b_2 e^{-\mu(\int dx\, F(x) + \int dy\, G(y))}).$$

Магнитное поле

$$B = \frac{F(x)G(y)}{(F(x)^2+G(y)^2)^2}(G'^2(y)-F'^2(x)) + \frac{1}{2}\frac{G(y)F''(x)-F(x)G''(y)}{F^2(x)+G^2(y)}.$$

Потенциал

$$U(x,y) = u(x,y) - \frac{G^2(y)}{F(x)}\frac{F''(x)}{F^2(x)+G^2(y)} - \frac{F^2(x)}{G(y)}\frac{G''(y)}{F^2(x)+G^2(y)} +$$

$$\frac{G^2(y)}{F^2(x)}\frac{G^2(y)+3F^2(x)}{(F^2(x)+G^2(y))^2}F'^2(x) + \frac{F^2(x)}{G^2(y)}\frac{F^2(x)+3G^2(y)}{(F^2(x)+G^2(y))^2}G'^2(y)$$

с произвольными функциями $F(x), G(x)$ и постоянной μ.

Отметим, что функции ϕ, t связаны соотношением

$$t_x + \phi t_y - 2\frac{\phi_y - \phi\phi_x}{\phi^2+1}t = 0. \tag{64}$$

Подстановка

$$t = \frac{w(Z)}{Z_x^2+Z_y^2}, \quad \phi = -\frac{Z_x}{Z_y} \tag{65}$$

(где Z- произвольная функция от x и y, а w- произвольная функция от Z) полностью интегрирует соотношение (64).

В случае $t=1$ получаем из соотношения (64), что выполняется уравнение Хопфа $\phi_y = \phi\phi_x$, т.е из произвольного решения уравнения эйконала можно получить решение уравнение Хопфа, используя (65). Верно и обратное.

Случай $t=1$ рассмотрен в Главе 5, заметим, что в этом случае в гамильтонианах h, $\hat{h}$ переменные не разделены, а магнитное поле не преобразуется.

В Гл. 6 В Разделе 6.2 рассматриваются рациональные решения ряда динамических систем типа нелинейного уравнения Шредингера, в частности, системы Леви. Получены уравнения динамики полюсов и преобразования Беклунда для этих решений. Показано, что возможна редукция этих решений в рациональные решения уравнения Пенлеве PIV, причем уравнения динамики полюсов переходят в стационарные уравнения для двумерного кулоновского газа в параболическом потенциале.

Динамическая система Леви имеет вид

$$a_t = \partial_x(a_x + a^2 + 2ab + \nu a), \quad b_t = \partial_x(-b_x + 2ab + b^2 + \nu b). \tag{66}$$

Используя анализ особенностей и асимптотик решений системы (66), нетрудно показать, что общее рациональное решение этой системы имеет вид

$$a = \alpha x + \beta + \sum_{w} \frac{1}{x-w} - \sum_{v} \frac{1}{x-v}, \quad b = \alpha' x + \beta' + \sum_{v} \frac{1}{x-v} - \sum_{\breve{w}} \frac{1}{x-\breve{w}}, \tag{67}$$

причем зависимость от времени величин α, α', β, β' определяется следующими уравнениями:

$$\alpha_t = 2\alpha(\alpha + 2\alpha'),\ \alpha'_t = 2\alpha'(\alpha' + 2\alpha), \tag{68}$$

$$\beta_t = \beta(\alpha + 2\alpha') + \alpha(\beta + 2\beta' + \nu),\ \beta'_t = \beta'(\alpha' + 2\alpha) + \alpha'(\beta' + 2\beta + \nu).$$

Пусть элемент a принадлежит набору $\{a\}$ (т.е. $a \in \{a\}$), причем число элементов набора не фиксируется. Для упрощения записи введем следующие обозначения:

$$\sum f(x-a) = \sum_{a \in \{a\}} f(x-a), \quad \sum f(a-a') = \sum_{a' \in \{a\},\, a' \neq a} f(a-a'). \tag{69}$$

Подставляя (67) в (66), получим систему, описывающую динамику полюсов рациональных решений системы Леви.

Введем новые переменные

$$w = f\mathbf{w} + g,\ v = f\mathbf{v} + g,\ \breve{w} = f\breve{\mathbf{w}} + g, \tag{70}$$

причем

$$f_t = -2(\alpha + \alpha')f,\ g_t = -2(\alpha + \alpha') - 2(\beta + \beta') - \nu, \quad d\xi = -2\frac{dt}{f^2}.$$

Подставляя (70) в систему, описывающую динамику полюсов, имеем

$$\mathbf{w}_\xi = \sum \frac{1}{\mathbf{w} - \mathbf{w}'} - \sum \frac{1}{\mathbf{w} - \breve{\mathbf{w}}}, \quad \breve{\mathbf{w}}_\xi = \sum \frac{1}{\breve{\mathbf{w}} - \mathbf{w}} - \sum \frac{1}{\breve{\mathbf{w}} - \breve{\mathbf{w}}'} \tag{71}$$

и аналогичные уравнения для $\mathbf{v}$.

Из соотношения (71) можно получить систему Калоджеро–Мозера:

$$\mathbf{w}_{\xi\xi} = -2\sum \frac{1}{(\mathbf{w} - \mathbf{w}')^3}, \quad \mathbf{v}_{\xi\xi} = -2\sum \frac{1}{(\mathbf{v} - \mathbf{v}')^3}. \tag{72}$$

Используя преобразование

$$a_x = a(\hat{b} - b),\ \hat{b}_x = \hat{b}(\hat{a} - a), \tag{73}$$

получаем преобразование Бэклунда для полюсов рациональных решений системы Леви, а также системы Калоджеро-Мозера:

$$
\begin{aligned}
&-\sum \frac{1}{w-\hat{w}} + 2\sum \frac{1}{w-w'} - \sum \frac{1}{w-\check{w}} = 0,\\
&-\sum \frac{1}{v-\hat{v}} + 2\sum \frac{1}{v-v'} - \sum \frac{1}{v-\check{v}} = 0.
\end{aligned}
\tag{74}
$$

Эта система может быть рассмотрена как дискретное уравнение Калоджеро-Мозера.

В Разделе 6.3 представление кулоновского газа получено для уравнений Пенлеве $PII - PIV$. Выведены уравнения на нули и полюса рациональных решений уравнений $PV - PVI$. С помощью гамильтонова формализма построено спиновое представление для уравнений Пенлеве.

В современной литературе принято рассматривать следующие шесть уравнений Пенлеве ($a, b, c, d-$ числа):

$$
\begin{aligned}
&PI: \ w_{xx} = 6w^2 + x,\\
&PII: \ w_{xx} = 2w^3 + xw + a,\\
&PIII: \ w_{xx} = \frac{w_x^2}{w} - \frac{w_x}{x} + \frac{aw^2+b}{x} + cw^3 + \frac{d}{w},\\
&PIV: \ w_{xx} = \frac{w_x^2}{2w} + \frac{3w^3}{2} + 4xw^2 + 2(x^2-a)w + \frac{b}{w},\\
&PV: \ w_{xx} = (\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1})w_x^2 - \frac{w_x}{x} + \frac{2}{x^2}(w-1)^2(aw + \frac{b}{w}) + \frac{cw}{x} + \frac{dw(w+1)}{w-1},\\
&PVI: \ w_{xx} = \frac{1}{2}(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-x})w_x^2 - (\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{w-x})w_x +\\
&\qquad + \frac{w(w-1)(w-x)}{x^2(x-1)^2}\left[a + \frac{bx}{w^2} + \frac{c}{(w-1)^2}(x-1) + \frac{dx(x-1)}{(w-x)^2}\right].
\end{aligned}
$$

Все уравнения Пенлеве, кроме первого (т.е. $PII - PVI$), могут иметь подвижные особые точки в виде простых полюсов, причем решение вблизи этих особых точек ведет себя следующим образом

$$
w(x) = \frac{q}{x-z} + g(z) + o(z)(x-z), \quad x \to z, \tag{75}
$$

заряд q (вычет) не зависит от положения полюса для уравнений PII, $PIII$ и PIV, причем $q = \pm const$, ($q^2 = 1$ для уравнений PII и PIV). Функция $g(z)$ для уравнений PII, $PIII$ и PIV не зависит от заряда q (для уравнений PV и PVI это не так), и применима следующая процедура для построения уравнений кулоновского газа: общее рациональное решение уравнений Пенлеве имеет вид

$$w(x) = \alpha x + \beta + \sum_i \frac{q_i}{x - x_i}, \tag{76}$$

используя (75), имеем

$$g(x_i) - \alpha x_i - \beta = \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{x_i - x_j}, \quad \forall i. \tag{77}$$

Поясним смысл термина "кулоновский газ" - определим потенциал

$$u(x) = -G(x) + \frac{1}{2}\alpha x^2 + \beta x,\ G'(x) = g(x),$$

тогда, варьируя функционал энергии заряженных частиц по положению зарядов, x_i

$$E = \sum_i q_i u(x_i) + \sum_{i>j} q_i q_j \log(x_i - x_j), \tag{78}$$

взаимодействующих по двумерному закону Кулона и находящихся в потенциале, получаем систему уравнений (77).

Уравнения Пенлеве лагранжевы. Все плотности лагранжианов уравнений Пенлеве можно привести к виду

$$\mathcal{L} = \mathcal{C}(w, x) - \frac{1}{4\mathcal{A}(w, x)}(w_x + \mathcal{B}(w, x))^2, \tag{79}$$

поэтому удобно ввести гамильтоново описание этих лагранжианов

$$\mathcal{L} = p w_x + \mathcal{A}(w, x) p^2 + \mathcal{B}(w, x) p + \mathcal{C}(w, x), \tag{80}$$

действительно, исключая p из (80), получим (79). Гамильтоновская форма описания уравнений Пенлеве была введена в работе [34], (см. также [35]). Это описание очень удобно для получения преобразований Беклунда для уравнений Пенлеве (кроме первого) в универсальной форме

$$-\frac{1}{2\mathcal{A}(w, x)}(w_x + \mathcal{B}(w, x)) = p = \frac{D}{\hat{w} - w}, \tag{81}$$

причем коэффициенты гамильтониана имеют вид

$$\mathcal{A} = a_3 w^3 + a_2 w^2 + a_1 w + a_0,\ \mathcal{B} = b_2 w^2 + b_1 w + b_0,\ \mathcal{C} = c_1 w, \tag{82}$$

преобразования Беклунда действуют на них следующим образом

$$\hat{a_i} = a_i, \quad \hat{b_2} = b^2 - 3a_3 D, \quad \hat{b_1} = b_1 - 2a_2 D, \quad \hat{b_0} = b_0 - a_1 D, \tag{83}$$

$$c_1 = b_2 D - a_3 D^2, \ \hat{c_1} = 2a_3 D^2 - b_2 D.$$

Преобразования Беклунда для уравнений Пенлеве активно изучались многими авторами, однако, следует отметить пионерскую работу Громака [36], а также статью Абловица и Фокаса [37]. Заметим, что ПБ уравнений Пенлеве в этом Разделе будут играть вспомогательную роль - они необходимы, чтобы определить гамильтоновы параметры A, B, C, D, закон их преобразования и определение параметров уравнений Пенлеве через эти параметры.

Используя (80) и (81), можно получить динамические спиновые системы, эквивалентные уравнениям Пенлеве $P_J \quad (P_{II} - P_{VI})$:

$$\frac{i}{2}\nu_J(x)\vec{S}_x = [\vec{S} \times \frac{\delta H_J}{\delta \vec{S}}], \quad H_J = (\vec{S}\hat{I}_J\vec{S}) + (\vec{h_J}\vec{S}), \quad \vec{S}^2 = D^2, \tag{84}$$

где

$$\nu_{II} = \nu_{IV} = 1, \quad \nu_{III} = \nu_V = x, \quad \nu_{VI} = x(x-1), \tag{85}$$

а вектор спина $\vec{S}$ и гамильтонова пара $(p,\, w)$ связаны следующим соотношением:

$$\vec{S} = \vec{M}(w)p + \frac{D}{2}\frac{\partial \vec{M}(w)}{\partial w}, \quad \vec{M}(w) = (w^2 - 1,\ iw^2 + i,\ 2w). \tag{86}$$

Нетрудно найти тензор анизотропии $\hat{I}_J$ и магнитное поле $\vec{h}_J$, входящие в гамильтониан H_J в скалярной форме

$$r(w,x) = (\vec{M}(w)\hat{I}(x)\vec{M}(w)) = \nu(x)\mathcal{A}(w,x), \tag{87}$$

$$h(w,x) = (\vec{M}(w)\vec{h}(x)) = \nu(x)[\mathcal{B}(w,x) - \frac{D}{2}\mathcal{A}_w(w,x)].$$

Интересно отметить, что гамильтониан H_J описывает динамику спина длины D в поле анизотропии I и в магнитном поле $\vec{h}$, причем произвольную систему вида (80) можно привести к виду (84) в том случае, если

$$\mathcal{C}_w = \frac{D}{2}[\mathcal{B}_{ww} - \frac{D}{3}\mathcal{A}_{www}], \tag{88}$$

т.е. должно быть выполнено условие интегрируемости (83).

В Гл. 7 рассматривается классификация скалярных уравнений с квадратичной нелинейностью с помощью пары Лакса в представлении Фурье.

В Разделе 7.1 рассматриваются следующие системы:

$$\frac{d}{dt}u_q(t) = \omega(q)u_q(t) + \sum_{p_1+p_2=q} w(p_1,p_2)u_{p_1}(t)u_{p_2}(t). \tag{89}$$

Представление Лакса для уравнения (89) выглядит следующим образом:

$$L_t = [A,L], \quad L = \alpha + \sum_p U^p u_p, \quad A = \beta + \sum_p V^p u_p, \quad [\alpha,\beta] = 0, \tag{90}$$

где α, β, U^p, V^p - некоторые не зависящие от времени операторы. Прямые вычисления показывают, что выражения (90) являются парой Лакса для уравнения (89) в том и только в том случае, если

$$[V^p,U^q] + [V^q,U^p] = 2w(p,q)U^{p+q}, \quad [\beta,U^p] + [V^p,\alpha] = \omega(p)U^p. \tag{91}$$

Можно использовать следующее матричное представление для операторов в пространстве Фурье

$$\alpha_{kk'} = \alpha(k)\delta_{k,k'},\ \beta_{kk'} = \beta(k)\delta_{k,k'},\ U^p_{kk'} = l(k,p)\delta_{k,k'+p},\ V^p_{kk'} = a(k,p)\delta_{k,k'+p}. \tag{92}$$

Подставим определения (92) в представления Лакса (91) и получим:

$$\begin{aligned} &a(k,q)l(k-q,p) + a(k,p)l(k-p,q) - a(k-q,p)l(k,q) - \\ &- a(k-p,q)l(k,p) = 2w(p,q)l(k,p+q), \end{aligned} \tag{93}$$

а также

$$[\alpha(k) - \alpha(k-p)]a(k,p) = [\beta(k) - \beta(k-p) - \omega(p)]l(k,p). \tag{94}$$

В подразделе 7.1.1 получена полная классификация бездисперсионных уравнений вида (89). Уравнение (93) определяет все возможные квадратичные члены уравнения (89). Среди бездисперсионных уравнений получены такие известные системы, как система Камасса-Холма, Дегаспериса, а также есть новые системы. Уравнение, определяемое соотношениями

$$\begin{aligned} &u_t = m\,u, \quad m_p = B(p)u_p, \quad B(p) = b(-p) - b(p), \\ &b(x) = \frac{b_1(1-e^{h_1 x}) - b_2(1-e^{h_2 x})}{e^{h_1 x} - e^{h_2 x}}, \end{aligned} \tag{95}$$

является новым и имеет интересные приложения. В подразделе 7.1.2 исследуется возможный вид дисперсии уравнений вида (89). Для того, чтобы дисперсия существовала бы, необходимо выполнение и уравнения (94). Получены известные уравнения с дисперсией, такие как КдВ, уравнение промежуточной воды (ILW). Анализ показывает, что других систем в подклассе дисперсионных систем нет. В подразделе 7.1.3 рассматриваются возможные обобщения.

В разделе 7.2 получено чисто алгебраическое решение задачи Коши одного из многочастичных "gold-fish" уравнений Калоджеро [38]:

$$\ddot{x}_i = 2\dot{x}_i \sum_{j\neq i} \frac{\dot{x}_j}{x_i - x_j}. \tag{96}$$

См. также рациональную версию системы Руйзенарса-Шнайдера [39],[40].

Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$P(x_j(t), t) = 0, \quad P(\xi, t) = \prod_j (\xi - x_j(t)) = P(\xi) - t\, Q(\xi), \tag{97}$$

где

$$P(\xi) = P(\xi, 0) = \prod_i (\xi - x_i(0)), \quad Q(\xi) = P(\xi) \sum_i \frac{\dot{x}_i(0)}{\xi - x_i(0)}, \tag{98}$$

определяющее величины $x_i(t)$ и полностью решающее задачу Коши уравнения (96).

В Заключении диссертации излагаются итоги выполненного исследования, делаются основные выводы, обсуждаются перспективы дальнейшего развития результатов диссертации, а также возможные приложения этих результатов.

Публикации автора по теме диссертации

[M1] В.Г. Марихин, Гамильтонова теория интегрируемых обобщений нелинейного уравнения Шредингера, Письма в ЖЭТФ **66:11**, 673–678 (1997).

[M2] В.Г. Марихин, А.Б. Шабат, Интегрируемые решетки, Теор. Мат. Физ. **118:2**, 217–228 (1999).

[M3] В.Г. Марихин, А.Б. Шабат, М. Бойти, Ф. Пемпинелли, Автомодельные решения типа нелинейного уравнения Шредингера, ЖЭТФ **117:3**, 634–643 (2000).

[M4] В.Г. Марихин, Представление кулоновского газа для рациональных решений уравнений Пенлеве, Теор. Мат. Физ. **127:2**, 284–303 (2001).

[M5] В.Э. Адлер, В.Г. Марихин, А.Б. Шабат, Лагранжевы цепочки и канонические преобразования Беклунда, Теор. Мат. Физ. **129:2**, 163–183 (2001).

[M6] V.G. Marikhin, Integrable systems with quadratic nonlinearity in Fourier space, Phys. Lett. **A310**, 60–66 (2003).

[M7] В.Г. Марихин, Динамика электронных уровней в присутствии примеси и модель Руйзенарса-Шнайдера, Письма в ЖЭТФ **77:1**, 48–50 (2003).

[M8] V.G. Marikhin, V.V. Sokolov, Separation of variables on a non-hyperelliptic curve, Regul. Chaotic Dyn. **10:1**, 59–70 (2005).

[M9] В.Г. Марихин, В.В. Соколов, О квазиштеккелевых гамильтонианах, Успехи мат. наук. **60:5**, 175–176 (2005).

[M10] В.Г. Марихин, В.В. Соколов, Пары коммутирующих гамильтонианов, квадратичных по импульсам, Теор. Мат. Физ. **149:2**, 147–160 (2006).

[M11] В.Г. Марихин, Метод одевания и разделение переменных. Двумерный случай, Теор. Мат. Физ. **161:3**, 327–331 (2009).

[M12] V.G. Marikhin, V.V. Sokolov, Transformation of a pair of commuting Hamiltonians quadratic in momenta to a canonical form and on a partial real separation of variables for the Clebsch top, Regul. Chaotic Dyn. **15:6**, 652–658 (2010).

[M13] В.Г. Марихин, О некоторых решениях двумерных уравнений типа Шредингера в магнитном поле, Теор. Мат. Физ. **168:2**, 219–226 (2011).

[M14] В.Г. Марихин, О двумерном уравнении Шредингера в магнитном поле с дополнительным квадратичным интегралом движения, Письма в ЖЭТФ **94:3**, 262–266 (2011).

[M15] В.Э. Адлер, В.Г. Марихин, А.Б. Шабат, Квантовые волчки как примеры коммутирующих дифференциальных операторов, Теор. Мат. Физ. **172:3**, 355–374 (2012).

[M16] В.Г. Марихин, Квазиштеккелевы системы и двумерные уравнения Шредингера в электромагнитном поле, Теор. Мат. Физ. **177:1**, 83–92 (2013).

[M17] В.Г. Марихин, О классическом движении заряженной частицы в электромагнитном поле в двумерии с дополнительным квадратичным интегралом движения, Письма в ЖЭТФ **97:1**, 491–495 (2013).

[M18] V.G. Marikhin, On three-dimensional quasi-Stackel Hamiltonians, J. Phys. **A47**, 175201 (2014).

[M19] В.Г. Марихин, Действие как инвариант преобразований Беклунда лагранжевых систем, Теор. Мат. Физ. **184:1**, 71–78 (2015).

[M20] В.Г. Марихин, Трехмерная решетка преобразований Бэклунда интегрируемых случаев системы Дэви - Стюартсона, Теор. Мат. Физ. **189:3**, 361–369 (2016).

[M21] V.G. Marikhin, Two new integrable cases of two-dimensional quantum mechanics with a magnetic field, Письма в ЖЭТФ **103:7**, 552–556 (2016).

Цитируемая литература

[1] E.V. Ferapontov, A.P. Fordy, Commuting quadratic Hamiltonians with velocity-dependent potentials, Rep. Math. Phys. **44:1-2**, 71–80 (1999).

[2] H.M. Yehia, Further Classification of 2D Integrable Mechanical Systems with Quadratic Invariants, Regular and Chaotic Dynamics . **14:4-5**, 571–579 (2009).

[3] B. Dorizzi, B. Grammaticos, A. Ramani, P. Winternitz, Integrable Hamiltonian systems with velocity dependent potentials, J. Math. Phys. **26**, 3070–3079 (1985).

[4] M. Adler, P. van Moerbeke, The Kowalevski and Henon-Heiles motions as Manakov geodesic flows on so(4) - a two dimensional family of Lax pairs, Comm. in Math. Phys. **113**, 659–700 (1988).

[5] A. Clebsch, Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit, Math. Annalen, series 3, 238–262 (1870).

[6] F. Kötter, Uber die Bewegung eines festen Körpers in einer Flussigkeit. I.II, J. Reine und Angew. Math. **109**, 51–81, 89–111 (1892).

[7] E.G. Kalnins, W. Miller (JR.), P. Winternitz, The group O(4), separation of variables and the hydrogen atom, SIAM J. Appl. Math. **30**, 630-644 (1976).

[8] I.V. Komarov, A.V. Tsiganov, On integration of the Kowalevski gyrostat and the Clebsch problems, Regular and Chaotic Dynamics **9:2**, 169–187 (2004).

[9] С.В. Манаков, Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела, Функц. анализ. **10:4**, 93–94 (1976).

[10] А.В. Борисов, И.С. Мамаев, Динамика твёрдого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос.– Москва–Ижевск: ИКИ, 2005. — 576 с.

[11] Maciej Blaszak, Ziemowit Domański, Artur Sergyeyev, Blazej M. Szablikowski, Integrable quantum Stäckel systems, Phys. Lett. **A377**, 2564–2572 (2013).

[12] Б.А. Дубровин, И.М. Кричевер, С.П. Новиков, Уравнения Шредингера в периодическом магнитном поле и римановы поверхности, ДАН СССР **229**, 15 (1976).

[13] S.P. Novikov, A.P. Veselov, Exactly solvable two-dimensional Schrödinger operators and Laplace transformations, Amer. Math. Soc. Transl (2) **179**, 109–132 (1997).

[14] E.V. Ferapontov and A.P. Veselov, Integrable Schrödinger operators with magnetic fields: factorisation method on curved surfaces, J. Math. Phys. **42:2**, 590–607 (2001).

[15] J. Berube, P. Winternitz, Integrable and superintegrable systems in a magnetic field, J. Math. Phys. **45:5**, 1958 (2004).

[16] I. Schur, Über vertauschbare lineare Differentialausdrücke, Sitzungsber. Berliner Math. Ges. **4**, 2–8 (1905).

[17] J.L. Burchnall, T.W. Chaundy, Commutative ordinary differential operators, Proc. R. Soc. Lond. **A118**, 557–583 (1928).

[18] С.П. Новиков, Периодическая задача для уравнения Кортевега — де Фриза. I, Функц. анализ. **8:3**, 54–66 (1974).

[19] И.М. Кричевер, Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов, Функц. анализ. **12:3**, 20–31 (1978).

[20] А.В. Михайлов, А.Б. Шабат, Р.И. Ямилов, Симметрийный подход к классификации нелинейных уравнений. Полные списки интегрируемых систем, Успехи мат. наук. **42:4**, 3–53 (1987).

[21] A.V. Bäcklund, Om ytor med konstant negativ krökning, Lunds Universitets Årsskrift Avd. **19**, 1 (1883).

[22] Y. Kodama, M. Wadati, Theory of Canonical Transformations for Nonlinear Evolution Equations. I, Progress of Theoretical Physics. **56**, 1740 (1976).

[23] V.B. Kuznetsov and E.K. Sklyanin, On Bäcklund transformations for many-body systems, J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 2241–2251 (1998).

[24] Е.Л. Инс, Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Харьков, 1938.

[25] M. Boiti, F. Pempinelli, Nonlinear Schrödinger equation, Bäcklund transformations and Painlevè transcendents, Nuovo Cimento **B59**, 40 (1980).

[26] I.M. Gelfand, L.A. Dickii, Asymptotic behaviour of resolvent of Sturm-Liouville equations and the algebra of the Korteweg - De Vries equations, Russian Math. Surveys. **30**, 77 (1975).

[27] J. Sanders, J.P. Wang, On the integrability of homogeneous scalar evolution equations, J. of Differential Equations. **147**, 410–434 (1998).

[28] A.V. Mikhailov, V.S. Novikov, Perturbative symmetry approach, J. of Phys. A: Math. Gen. **35**, 22 (2002).

[29] E.V. Ferapontov, A.P. Fordy, Nonhomogeneous systems of hydrodynamic type related to quadratic Hamiltonians with electromagnetic term, Physica D. **108**, 350–364 (1997).

[30] E. McSween, P. Winternitz, Integrable and superintegrable Hamiltonian systems in magnetic fields, J. Math. Phys. **41**, 2957–2967 (2000).

[31] А.И. Переломов, Несколько замечаний об интегрировании уравнений движения твердого тела в идеальной жидкости, Функц. анализ и его приложения. **15:2**, 83–85 (1981).

[32] С.С. Сафин, Р.А. Шарипов, Автопреобразование Бэклунда для уравнения $u_{xt} = e^u - e^{-2u}$, Теор. Мат. Физ. **95:1**, 146-159 (1993).

[33] А.Б. Шабат, К теории преобразований Лапласа-Дарбу, Теор. Мат. Физ. **103:1**, 170–175 (1995).

[34] K. Okamoto, Polynomial Hamiltonians Assotiated with Painleve equations, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **56:6**, 264–268 (1980).

[35] Б.И. Сулейманов, Гамильтонова структура уравнений Пенлеве и метод изомонодромных деформаций, Дифференциальные уравнения **30:5**, 791–795 (1994).

[36] V. I. Gromak, Об однопараметрических семествах решений уравнений Пенлеве, Differ. Uravn. **14:2**, 2131–2135 (1978).

[37] A.S. Fokas and M.I. Ablowitz, On a unified approach to transformations and elementary solutions of Painlevè equations, J. Math. Phys. **23**, 2033 (1982).

[38] F. Calogero, Motion of Poles and Zeros of Special Solutions of Nonlinear and Linear Partial Differential Equations, and Related "Solvable"Many-Body Problems, Nuovo Cimento. **43B**, 177–241 (1978).

[39] S.N.M. Ruijsenaars and H. Schneider, A new class of integrable systems and its relation to solitons, Ann. of Phys. **170**, 370 (1986).

[40] S.N.M. Ruijsenaars, Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities, Commun. Math. Phys. **110**, 191–213 (1987).