

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау  
Российской академии наук

на правах рукописи

МАТВЕЕНКО Сергей Иванович

**ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ В НИЗКОРАЗМЕРНЫХ  
КОРРЕЛИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ**

Специальность 01.04.02 - теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени  
доктора физико-математических наук

Черноголовка - 2012

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор  
Сергей Николаевич Артеменко

доктор физико-математических наук  
Сергей Евгеньевич Коршунов

доктор физико-математических наук, профессор  
Валерий Борисович Шикин

Ведущая организация: Учреждение Российской академии наук  
Институт спектроскопии РАН.

Защита состоится 28 июня 2012 г. в 12 часов на заседании диссертационного совета Д 002.207.01 при Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, по адресу: 142432, Московская обл, г. Черноголовка, ул. академика Осипьяна, д. 2, Институт физики твердого тела РАН.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институте теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук.

Автореферат разослан \_\_\_\_ мая 2012 г..

Учёный секретарь диссертационного совета  
доктор физико-математических наук

П. Г. Гриневич

Актуальность темы. Низкоразмерные коррелированные системы привлекают внимание последние десятилетия в связи с попытками получить сверхпроводники с высокой температурой перехода ( поляронный механизм сверхпроводимости); особыми свойствами: дискретной или непрерывной симметрией основного состояния, образованием волн зарядовой и спиновой плотности в электронных квазиодномерных системах, сильными эффектами автолокализации с образованием топологических возбуждений типа солитонов с локальными уровнями глубоко в запрещенной зоне; высокотемпературными сверхпроводниками, в которых существенную роль играют проводящие плоскости  $CuO$ ; прогрессом в области Бозе-конденсации ультра-холодных атомных газов, где конечные одномерные или двумерные системы слабо взаимодействующих бозонов или фермионов могут реализовываться в эксперименте.

Основной целью настоящей диссертации является

Теоретическое исследование структур упорядоченных состояний, возникающих в различных коррелированных системах: вихревой решетки во вращающемся Бозе-конденсате ультра-холодного атомарного газа;

солитонной структуры в ВЗП- кристаллах с учетом кулоновских взаимодействий, описания дислокаций, возникающих при слиянии солитонов, их равновесного распределения и динамики под действием внешнего поля;

построение теории псевдощели в системах ВЗП, поперечного туннелирования в ВЗП кристаллах;

исследование транспорта заряда спиновыми и зарядовыми возбуждениями и связанной с этим проблемы спин-зарядового разделения в одномерных коррелированных системах;

исследование периодической структуры зарядовой /спиновой плотности в низкоразмерных сверхпроводниках.

С формальной точки зрения основным объектом исследования диссертации являются различные модели коррелированных систем: двумерная модель газа Бозе-частиц с локальным взаимодействием, квази-

одномерные модели электрон-фононных систем типа Пайерлса, модели коррелированных фермионов типа Латтинжера, Калоджеро-Сазерланда, Хаббарда, спиновые модели на квадратной решетке, двумерная модель сверхпроводимости.

С физической же точки зрения представленные результаты применимы для описания вращающегося бозе-конденсата газа атомов; квазиодномерных систем с волнами зарядовой (ВЗП) и спиновой (ВСП) плотности, включая проводящие полимеры типа полиацетилена, кристаллы ВЗП типа  $NbSe_3$ ,  $TaS_3$ ; краевых состояний в системах с квантовым эффектом Холла; "полосатой" фазы (периодической структуры зарядовой/спиновой плотности) в одномерных и высокотемпературных сверхпроводниках.

На защиту выносятся следующие основные результаты:

1. Исследованы вихревые состояния, наблюдаемые в быстро вращающемся Бозе-конденсате. Найдены аналитические решения для вихревой структуры в параболической (симметричной или анизотропной) ловушке. В самосогласованной микроскопической модели получены точные решения уравнений Боголюбова-де Жена для спектра возбуждений вихревой решетки (моды Ткаченко). Вычислено затухание возбуждений. При нулевой температуре  $\epsilon(p) \sim p^2$ ,  $\gamma(p)/\epsilon(p) \sim 1/\nu \ll 1$  ( $\nu = N/N_v \gg 1$  в области вихревого конденсата,  $N$  – число частиц,  $N_v$  – число вихрей). Предсказано сильное затухание длинноволновых возбуждений при  $T \neq 0$ ,  $\gamma \sim T/\nu$ ), вычислены корреляционные функции, экспоненциально спадающие при конечных температурах.
2. Построена теория псевдощели в 1D электрон-фононных системах, включая системы с соизмеримыми и несоизмеримыми волнами зарядовой плотности, вычислены спектры оптического поглощения, фото-электронной спектроскопии (PES, ARPES). Псевдощель простирается далеко вглубь запрещенной зоны до энергий солитона  $W_s = 2\Delta/\pi$  или полярона  $W_p = 2^{3/2}\Delta/\pi$  (для диэлектрика Пайерлса). Построена теория межцепочечного туннелирования в подщелевом диапазоне для квазиодномерных систем волн

- зарядовой плотности (ВЗП), найдены вольт-амперные характеристики. Экспериментально наблюдаемые пороговые значения напряжения связаны с энергиями кинков, поляронов, биполяронов.
3. Построена теория солитонов и дислокаций в кристаллах ВЗП. Исследовано взаимодействие солитонов в ВЗП кристалле, найдены условия агрегации солитонов в дислокационные петли. Выведены и исследованы уравнения диссипативной динамики ВЗП в присутствии непрерывного распределения солитонов и дислокаций. Исследована структура ВЗП вблизи проводящей поверхности, предсказано образование периодической структуры дислокаций.
  4. Электрические заряды одночастичных возбужденных состояний в общем случае нецелые, зависят от параметров системы (заполнения зоны, констант взаимодействия). Результаты получены в модели Пайерлса путем квазиклассического квантования солитонов (кинков, поляронов), и в модели Хаббарда, где вычислены электрические токи и заряды для различных возбуждений.
  5. Разделение спиновых и зарядовых степеней свободы в методе бозонизации является следствием линеаризации спектра вблизи Ферми-поверхности. Показано, что учет нелинейности электронного спектра приводит к взаимодействию спиновых и зарядовых полей. Исследованы эффекты спин-зарядовой связи: спиновые возбуждения переносят электрический ток, пропорциональный импульсу и дисперсии скорости на Ферми поверхности. Изменяются критические свойства систем со щелью в спиновом канале: магнитная восприимчивость становится конечной вместо корневой сингулярности при полях выше порогового. Результаты согласуются с точными вычислениями, проведенными для модели Хаббарда.
  6. Найдены точные решения для четырех 19-вершинных решеточных моделей, соответствующих квантовым спиновым  $S = 1$  коррелированным цепочкам. Вычислены статсуммы, энергии возбуждений, корреляционные длины, критические индексы.
  7. Исследованы эффекты примеси в модели Калоджеро-Сазерланда с  $BC_N$  симметрией: катастрофа ортогональности, осцилляции Фриделя. Вычислены точно соответствующие корреляционные функ-

ции. Результаты находятся в соответствии с предсказаниями конформной теории.

8. Рассмотрены динамические свойства краевых состояний в целочисленном ( $\nu = 1$ ) и дробном ( $\nu = 1/2m + 1$ ) квантовом эффекте Холла, описываемой киральной моделью Латинжера. Исследовано влияние зависящего от времени локального возмущения на основное состояние. Показано, что катастрофа ортогональности происходит между начальным и конечным состояниями. Вычислены интенсивность поглощения рентгеновских лучей с переходом электронов на краевые состояния. Вычислена нелинейная вольт-амперная характеристика для туннелирования между Ферми-жидкостью и краевыми состояниями.
9. Получены самосогласованные аналитические решения (в зависимости от концентрации дырок) для спин-зарядовой солитонной сверхструктуры (stripes) в квазиодномерной системе в рамках модели Хаббарда. В одно- и двумерных моделях, включающих сверхпроводящие корреляции, получены аналитические решения, описывающие полосатую фазу (stripes), сверхпроводящую фазу, область сосуществования сверхпроводящего и антиферромагнитного параметра порядка.

Научная новизна и достоверность. Основные результаты, представленные в диссертации, получены впервые, а её научные положения и выводы обоснованы согласием (а) с результатами экспериментальных исследований, (б) с результатами численного моделирования.

Практическая ценность работы. Результаты, полученные в настоящей диссертационной работе, используются как при интерпретации данных экспериментальных исследований, так и при планировании новых экспериментов.

Апробация работы. Результаты представленных в диссертации исследований докладывались на международных конференциях "Сильно коррелированные системы" (Бад Хоннеф, Германия, 1993, 1995, 1997), "Роль размерности в коррелированных электронных системах" (Турин, Италия, 1996), "Сильно коррелированные электронные системы" (Лейден,

Нидерланды, 2001), "Электронные кристаллы"(ECRYS, Каргез, Франция, 2002, 2005), "Решетки квантовых точек и Джозефсоновских контактов"(Киттен, Болгария, 2005), "Квантовые газы"(Париж, Франция, 2007), "Landau days"(Черноголовка, 2005, 2006, 2009,2010), а также на научных семинарах в ИТФ РАН, ИФП РАН, Лаборатории теоретической физики статистических моделей (Орсе, Франция), Лос-Аламосской национальной лаборатории, Высшей нормальной школы (ENS, Париж), университетах Кельна, Ганновера (Германия), Лафборо (Англия).

Публикация работы. Основное содержание работы опубликовано в ведущих российских и зарубежных журналах, входящих в перечень ВАК, в 26 научных статьях, список которых приводится в конце реферата. Часть работ написана совместно. Вклад автора в приведенные в диссертации результаты является основным.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка работ, в которых опубликованы представленные результаты, и списка цитированной литературы.

## СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность темы и дана характеристика объектов исследования. Здесь же сформулированы цели работы и перечислены результаты, выносимые на защиту, а также раскрывается содержание диссертации по главам.

Первая глава **Вихревые решетки во вращающемся Бозе - конденсате** посвящена исследованию вихревой решетки в быстро вращающемся Бозе - Эйнштейновском конденсате. Быстро вращающиеся Бозе - конденсированные газы составляют новый класс систем многих тел, где свойства основного состояния определяются коллективным поведением системы вихрей. Мы рассматриваем экспериментально реализуемую ситуацию, когда конденсат сильно локализован в направлении  $z$  внешним гармоническим потенциалом и вращается с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг оси  $\hat{z}$ . В плоскости  $(x, y)$  внешний потенциал имеет вид  $V = m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2)/2$ . Мы считаем, что все частицы находятся в том же макроскопическом квантовом состоянии, описываемым волновой функцией  $\psi(\mathbf{r})$ . Во вращающейся системе конденсат описывается уравнением Гросса-Питаевского

$$\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}\psi + g|\psi|^2\psi + V(\mathbf{r})\psi - \Omega\hat{L}_z\psi = \mu\psi, \quad (1)$$

где  $\hat{\mathbf{p}}$  – оператор импульса,  $m$  – масса атома,  $g > 0$  – эффективная константа взаимодействия,  $\hat{L}_z$  – оператор орбитального момента,  $\mu$  – химпотенциал. За вычетом члена с взаимодействием, гамильтониан вращающейся нейтральной частицы эквивалентен гамильтониану заряженной частицы в однородном "магнитном" поле  $B = 2m\Omega$  направленном вдоль оси  $z$ . При этом циклотронная частота равна  $2\omega_c = \Omega$ , а вектор-потенциал (в симметричной калибровке) имеет вид  $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{r}/2 = m\Omega \times \mathbf{r}$ .

$$\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \Omega\hat{L}_z + V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2m}(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{A}/c)^2 + \frac{1}{2}m(\omega_x^2 - \Omega^2)x^2 + \frac{1}{2}m(\omega_y^2 - \Omega^2)y^2. \quad (2)$$

Остаточный гармонический потенциал ( $\Omega \leq \omega_x \leq \omega_y$ ) снимает вырождение уровней Ландау. При условии  $\omega_x - \Omega, \omega_y - \Omega \ll \Omega$  и слабом



взаимодействии ( $ng \ll 2\Omega$ , где  $n$  - двумерная плотность частиц) мы ограничим рассмотрение нижним уровнем Ландау.

В первом разделе главы рассмотрен случай симметричной ловушки  $\omega_x = \omega_y = \omega$ . Волновые функции нижнего уровня Ландау имеют вид  $\psi = f(z) \exp(-|z|^2/2)$ , где  $z = x + iy$  (Здесь и ниже длины измеряются в единицах "магнитной" длины  $l = (\hbar/m\Omega)^{1/2}$ .) Спроектированное на нижний уровень уравнение Гросса–Питаевского принимает вид

$$\hbar(\omega - \Omega)z\partial_z f(z) + \frac{Ng}{\pi l^2} \int dz' d\bar{z}' |f(z')|^2 f(z') \exp(z\bar{z}' - 2z'\bar{z}') = \tilde{\mu} f(z), \quad (3)$$

где  $\tilde{\mu} = \mu - \hbar\omega$ , и функция  $[f(z)/l] \exp(-z\bar{z}/2)$  нормирована на единицу. В предельном случае бесконечной плоскости  $\Omega \rightarrow \omega$  уравнение решается точно. Конфигурацией, минимизирующей полную энергию является треугольная решетка вихрей, совпадающая с решеткой Абрикосова для сверхпроводников 2 рода вблизи  $T_{c2}$  (что не удивительно, так как решение Абрикосова составлено также из функций нижнего уровня Ландау).

$$f_0(z) = \frac{(2v)^{1/4}}{\sqrt{S}} \vartheta_1(\pi z/b_1, \tau) \exp(z^2/2), \quad (4)$$

где  $\tau = \exp(2\pi/3)$ ,  $\vartheta_1(\cdot, \cdot)$  - тэта-функция Якоби,  $b_1^2 = 2\pi/\sqrt{3}$ . При  $\Omega < \omega$  получено решение асимптотически точное в пределе большого числа вихрей  $N_v \gg 1$ :

$$f(z) = \frac{(2v)^{1/4}}{\sqrt{\alpha\beta}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{[R^2]} (-1)^{[n(n-1)/2]} \sqrt{R^2 - k} \frac{(iz)^k}{2^{k/2} k!} H_k \left( \sqrt{\frac{\pi v}{2}} (2n + 1) \right) \exp\{-\pi v(2n + 1)^2/4\}, \quad (5)$$

где  $H_k(w)$  - полиномы Эрмита,  $R = (2\alpha\beta/\pi)^{1/4}$ ,  $\beta = Ng/(l^2\hbar(\omega - \Omega))$ ,  $\alpha = 1.1596$ ,  $N$  - число частиц в конденсате. Структура вихревой решетки показана на Рис. (1)

Во втором разделе рассмотрен случай квазиодномерной системы, когда частота вращения  $\Omega$  равна меньшей из частот ( $\Omega = \omega_x < \omega_y$ ) потенциала ловушки. Получено решение описывающее периодическую структуру из цепочек вихрей.

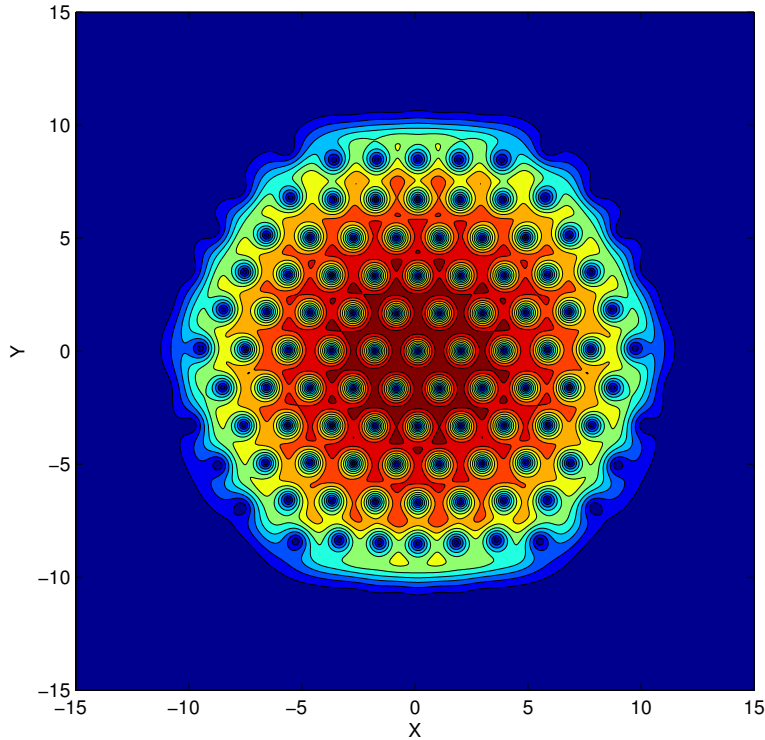


Рис. 1: Плотность конденсата  $|\psi(x, y)|^2$  при  $R = 11$ .

В третьем разделе рассмотрен общий случай анизотропной ловушки  $\Omega, \omega_x < \omega_y$ . Получено асимптотически точное при больших  $N_v$  решение для вихревой структуры. Найденные асимптотические выражения с огромной точностью совпадают с проведенными численными расчетами уже при  $N_v \sim 10$ .

В четвертом разделе исследуются возбуждения конденсата содержащего вихревую решетку. Найдено точное аналитическое решение уравнений Боголюбова-де Жена для возбуждений (мод Ткаченко), получен спектр возбуждений во всей зоне Бриллюэна ( $\epsilon(\mathbf{p}) \propto p^2, p \rightarrow 0$ ), вычислено затухание возбуждений при нулевой и конечной температурах, а также корреляционные функции. Уже при нулевой температуре матрица плотности спадает степенным образом с индексом  $\sim 1/\nu$ , при этом затухание  $\gamma(\mathbf{p})/\epsilon(\mathbf{p}) \sim 0.1/\nu$  и среднеквадратичные относительные флуктуации положения вихрей  $\sim 1/\nu$ . ( $\nu = N/N_v$  – параметр заполнения нижнего уровня Ландау). При  $\nu \gg 1$  затухание возбуждений и флуктуации решетки малы, при увеличении числа вихрей ( $\nu \sim 1 - 10$ ) происходит плавление решетки вихрей с переходом в сильно

коррелированное состояние типа квантового Холла, где приближение уравнений Гросса-Питаевского не работает. При ненулевой температуре возбуждения сильно затухают при малых импульсах (что соответствует имеющимся данным эксперимента), матрица плотности спадает экспоненциально на больших расстояниях, и упорядоченная вихревая структура может существовать на ограниченных масштабах.

Вторая глава **Псевдощель в квазиодномерных системах** посвящена построению теории псевдощели в одномерных электрон - фононных системах, наблюдаемой в спектрах оптического поглощения, фото - электронной спектроскопии (PES, ARPES). Рассматривается важный экспериментально исследуемый случай, когда щель открывается в результате спонтанного нарушения симметрии. В квазиодномерных проводниках это известная неустойчивость Пайерлса-Фрелиха, приводящая к образованию волны зарядовой плотности (ВЗП), а также аналогичная спин-пайерлсовская неустойчивость, приводящая к образованию волн спиновой плотности. Построена теория межцепочечного туннелирования в подщелевом диапазоне для квазиодномерных систем волн зарядовой плотности (ВЗП), найдены вольт-амперные характеристики. Показано, что экспериментально наблюдаемые пороговые значения напряжения связаны с энергиями кинков, поляронов, биполяронов.

В первом разделе рассматривается случай  $1D$  полупроводников с дискретной симметрией: систем с димеризованным основным состоянием, подобных хорошо известному полиацетилену  $(CH)_x$  или с соизмеримой ВЗП типа  $NbS_3$ .

Исследуется поглощение фотонов электронными возбуждениями в псевдощелевом диапазоне энергий. В адиабатическом приближении для электрон - фононных взаимодействии эти процессы описываются нелинейными конфигурациями инстантонного типа. Вычислены интенсивности фотоэлектронной спектроскопии (PES), включая интенсивности «рентгеновской фотоэмиссии с угловым разрешением» (ARPES), а также оптического поглощения.

В экспериментах ARPES измеряется энергия  $E$  и импульс  $P$  испус-

каемого, в результате поглощения фотона высокой энергии  $\Omega_0$ , электрона. Вероятность испускания электрона  $I(\Omega, P)$  пропорциональна мнимой части запаздывающей одноэлектронной функции Грина.

$$I(P, \Omega) \propto \text{Im} \int dx e^{-iPx} \int_0^\infty dT e^{i\Omega T} G(x, T, 0, 0). \quad (6)$$

(Мы будем опускать все постоянные факторы и принимать постоянную Планка  $\hbar = 1$ ;  $\Omega$  будет измеряться относительно края зоны или середины щели.) В PES экспериментах измеряется интегрированная по импульсу интенсивность поглощения  $I(\Omega) = \int dp I(p, \Omega)$ .

Используется адиабатическое приближение, основанное на малости фононных частот по сравнению со щелью в электронном спектре  $\Delta_0$ . Электроны движутся в медленно меняющемся фононном потенциале  $\Delta(x, T)$ , так что в любой момент времени  $t$  их энергии  $E_j(t)$  и волновые функции  $\psi_j(x, t)$  определяются из стационарного уравнения Шредингера для мгновенная конфигурация решетки и они зависят от времени параметрически. Интенсивность может быть записана в виде функционального интеграла  $D[\Delta(x, t)]$  по конфигурациям решетки  $\Delta(x, t)$

$$I(\Omega, P) \propto \int dx e^{-iPx} \int_0^\infty dT \int D[\Delta(x, t)] \Psi_0(x, T) \Psi_0^*(0, 0) \exp(-S[\Delta])$$

Это уравнение уже написано в евклидовом пространстве  $it \rightarrow t$ , удобном для изучения классически запрещенных процессов,  $\Psi_0(x, t; [Q])$  волновая функция добавленной в систему  $(N + 1)$ -ой частицы в мгновенном поле  $Q(x, t)$  с уровнем энергии  $E_0(t) = E_0[Q(x, t)]$  внутри запрещенной зоны. Эффективное действие  $S = S[Q(x, t)]$  выражается через лагранжиан  $L_j$

$$S = \int_{-\infty}^0 dt L_0 + \int_0^T dt (L_1 - \Omega) + \int_T^\infty dt L_0$$

где индексы  $j = 1, 0$  относятся к системе с  $j$  дополнительными частицами (дырками). Главный вклад в интенсивность вносят окрестности седловых точек действия  $S$ :  $\delta S / \delta Q = 0$   $\partial S / \partial T = 0$ , Последнее уравнение определяет значение  $T = T(\Omega) : L_1(T) - L_0(T) = E_0(T) = \Omega$ . Ненулевой вклад в интенсивности дают конфигурации  $\Delta(x, t)$  с конечным действием  $S_0 < \infty$ , локализованные в пространственно-временной

области. Такие экстремальные решения с конечным действием называются инстантонами, их траекториям соответствуют туннелирование в реальном времени. Для случая диэлектрика Пайерлса с половинным заполнением эффективное действие  $S$  состоит из кинетической энергии решетки и потенциальной энергии  $V_j[\Delta(x, t)]$ , включающей потенциальную энергию решетки и сумму энергий заполненных электронных состояний.

$$S\{\Delta(x, t)\} = \int dx L_j dt, \quad L_j = \int dx \frac{\dot{\Delta}^2}{\pi \lambda \omega_{ph}^2} + V_j[\Delta(x, t)].$$

где  $\omega_{ph}$  – фононная частота,  $\lambda$  – безразмерная константа электрон-фононной связи. В качестве оптимальной конфигурации используем известное поляронное решение для стационарной задачи, описывающее состояние с одной дополнительной частицей/дыркой и локальными уровнями  $\pm E_0$  внутри щели:

$$\Delta_s(x) = \Delta_0 \left( 1 - \tanh a \left[ \tanh(\Delta_0 x \tanh a + \frac{a}{2}) - \tanh(\Delta_0 x \tanh a - \frac{a}{2}) \right] \right).$$

В зависимости от параметра  $a$  оно описывает эволюцию от мелкого полярона при  $a \rightarrow 0$  к паре кинков при  $a \rightarrow \infty$ . Функционал потенциальной энергии  $V$  локальный уровень  $E_0$  известны

$$V_\nu(a) = \nu E_0 + \frac{4}{\pi} \sqrt{\Delta_0^2 - E_0^2} - \frac{4}{\pi} E_0 \cos^{-1} \frac{E_0}{\Delta_0}, \quad E_0 = \frac{\Delta_0}{\cosh a},$$

где  $\nu = 0, 1, 2$  – число частиц (электронов и дырок) добавленных в систему. Это решение является единственным с парой  $\pm E_0$  дискретных уровней в запрещенной зоне. Его возмущения генерируют только мелкие уровни, расположенные по краям  $\pm \Delta_0$ , которые не являются важными для описываемых процессов. Поэтому мы выбираем конфигурацию  $\Delta(x, t) = \Delta_s(x, a(t))$  в качестве оптимальной и заменяем интегрирование  $D\Delta(x, t) \rightarrow JDa(t)$ , где  $J$  – якобиан, дающий вклад в префактор. В результате получено, что наблюдаемая в PES псевдощель простирается далеко вглубь запрещенной зоны на интервал  $W_p = 2^{3/2} \Delta_0 / \pi < \Omega < \Delta_0$ . Вблизи верхнего края  $\Omega \approx \Delta_0$  получаем

$$I(\Omega) \sim (\Delta_0 - \Omega)^{-1/4} \exp \left[ -\frac{32\sqrt{C_0} (\Delta_0 - \Omega)^{3/2}}{9\pi \omega_0 \sqrt{\Delta_0}} \right], \quad (7)$$

а вблизи поляронной энергии  $\Omega \approx W_p$  находим

$$I(\Omega) \sim \frac{1}{\sqrt{\Omega - W_p}} \exp \left[ -C_1 \frac{\Delta_0}{\omega_0} \right] \exp \left[ C_2 \frac{(\Omega - W_p)}{\omega_0} \log \frac{C_3 \Delta_0}{(\Omega - W_p)} \right], \quad (8)$$

с известными численными коэффициентами  $C_i$ . Вычислены также интенсивности ARPES и оптического поглощения.

Во втором разделе исследуются эффекты псевдощели в электронных системах с бесщелевыми возбуждениями: 1D полупроводниках с акустическими фононами и несоизмеримых волнах зарядовой плотности (голубые бронзы, три-и тетра-халкогениды переходных металлов) в которых существенно взаимодействие с бесщелевыми коллективными модами. В этом случае получено, что область псевдощели изменяется до  $W_s = 2\Delta_0/\pi < \Omega < \Delta_0$ , при этом интенсивность PES падает экспоненциально вблизи края  $\Omega \sim \Delta_0$  и степенным образом вблизи абсолютного края.

В третьем и четвертом разделе исследуется туннелирование между цепочками в псевдощелевом диапазоне для случаев диэлектриков с соизмеримой и несоизмеримой ВЗП, соответственно. Рассмотрены процессы одно- и двух-электронного туннелирования, осуществляющиеся посредством солитонов, биполяронов. Как и в предыдущих разделах, задача туннелирования в рассматриваемом адиабатическом приближении сводится к нахождению инстантонных траекторий. Вычислены вольт-амперные характеристики  $j(U)$ . Для соизмеримой ВЗП процессы одноэлектронного туннелирования дают вклад  $\sim t_{\perp}^2$  в интервале  $2W_p < U < 2\Delta_0$ , двухэлектронные переходы – вклад  $\sim t_{\perp}^4$  в интервале  $2W_s < U < 2\Delta_0$ . В случае несоизмеримой ВЗП одноэлектронное туннелирование имеет порог  $2W_s$ , ( $2W_s < U < 2\Delta_0$ ), тогда как двух-электронное туннелирование возможно во всем подщелевом диапазоне  $-2\Delta_0 < U < 2\Delta_0$ .

Третья глава **Теория солитонов и дислокаций в системах волн зарядовой и спиновой плотности** посвящена

Построена теория солитонов и дислокаций в кристаллах ВЗП. Исследовано взаимодействие солитонов в ВЗП кристалле, найдены условия агрегации солитонов в дислокационные петли. Исследована струк-

тура ВЗП вблизи проводящей поверхности, предсказано образование периодической структуры дислокаций. Выведены и исследованы уравнения диссипативной динамики ВЗП в присутствии непрерывного распределения солитонов и дислокаций.

В первом разделе представлена теория солитонов в кристаллически упорядоченных волнах зарядовой плотности (ВЗП) при низких температурах. Описаны различные типы солитонов, возникающих в результате автолокализации электронов. Рассмотрена адаптация среды ВЗП к образованию  $\pi$ - и  $2\pi$ -солитонов. Для описания взаимодействия солитонов с кулоновским полем и деформацией фазы предложен модельно независимый подход. Рассмотрены эффекты экранирования, самоэкранирования и соизмеримости. Описывается взаимодействие солитонов между собой и с примесями. Найдены случаи притяжения солитонов, которые могут привести к их агрегации в микроскопические центры проскальзывания фазы.

Во втором разделе исследуются петлевые дислокации в кристаллах ВЗП, возникающие в результате агрегации солитонов. Основные результаты связаны с эффектами кулоновского взаимодействия при низкой концентрации остаточных носителей. Получены и решены уравнения равновесия для кулоновского потенциала  $\Phi$  и параметра порядка ВЗП  $\varphi$  и потенциала взаимодействия с солитонами  $V$ , а также энергия агрегации. Рассмотрены условия слияния солитонов в растущие дислокационные петли. Полученные результаты указывают на последовательные стадии конверсии тока в кристаллах ВЗП. Вдали от дислокационной петли поля  $\varphi$  и  $\Phi$  кратны полям, создаваемым солитоном:  $\varphi \approx 2N\varphi_s$ ,  $\Phi \approx 2N\Phi_s$ . В плоскости петли поля  $\Phi$  и  $\varphi$  с точностью до экспоненциально малых членов постоянны, кроме узкой окрестности дислокационной линии, где поведение  $\varphi$  соответствует стандартной вихревой нити. В этой окрестности имеет место притяжение солитонов к дислокационной линии снаружи в секторе  $|x| < -y$ .

В присутствии остаточных носителей тока (электронов, солитонов) становятся существенными эффекты экранирования. При этом на больших расстояниях распределение фазы подобно случаю без кулонов-

ского взаимодействия, но с усиленной анизотропией. Вблизи дислокационной петли распределение полей  $V$ ,  $\Phi$ ,  $\varphi$  аналогично случаю без экранирования, но с резко суженным вертикальным сектором оттачивания.

Вычислена энергия плоской кольцевой петли. В отличие от стандартного случая вихревой нити энергия содержит член, пропорциональный площади дислокационной петли, или числу солитонов. Показано, что для систем со слабым кулоновским взаимодействием энергетически выгодно слияние солитонов в дислокацию независимо от параметра анизотропии. Если размер петли превышает длину экранирования, энергия имеет стандартный вид и слияние солитонов выгодно по крайней мере при больших  $N$ .

В третьем разделе рассмотрена структура деформированной волны зарядовой плотности (ВЗП) вблизи боковой металлической поверхности. Показано, что проникновение заряда и экранирование электрического поля осуществляются через неоднородное распределение солитонов или дислокаций. Решаются самосогласованные уравнения теории упругости ВЗП с топологическими дефектами с учетом сопутствующих кулоновских полей. Для относительно высоких температур найдены распределения плотности газа солитонов и поля по глубине образца, вычислена емкость контакта. Для низких температур и концентраций подробно исследованы поля и индуцированные заряды для одиночной дислокации под металлической поверхностью. При достижении некоторой критической разности потенциалов ВЗП и металла возникает периодическая структура дислокаций. При малых зарядах вблизи порога дислокации находятся далеко друг от друга и, что неожиданно, на большой глубине. Таким образом, область контакта является естественным генератором и накопителем топологических дефектов ВЗП, которые могут служить зародышами центров проскальзывания фазы при пропускании продольного тока.

В четвертом разделе выведены уравнения диссипативной динамики волн зарядовой плотности (ВЗП) в присутствии непрерывного распределения дислокаций или солитонов. Найдены функции отклика полей



и связанная с ними корреляционная функция токов для процесса спонтанной конверсии электронов в солитоны. Подробно исследовано одномерное развитие импульса тока от узкого инжектирующего контакта в тонком образце. Задача решается в чисто диссипативном режиме динамики ВЗП и в диффузионном приближении для газа солитонов. Получено, что вначале за очень малые времена во всем образце устанавливаются номинальные значения тока ВЗП  $j - \infty$ , фазовой скорости ВЗП  $\beta_\infty = -\pi j_\infty$  и электрического поля  $E_\infty \propto j_\infty$ . Однако по мере продвижения с постоянной скоростью  $c$  фронта диффузии газа солитонов и роста их концентрации  $\rho_s$  ( $c = bE_\infty$ , где  $b$  - подвижность солитонов), скорость ВЗП  $\beta(x, t)$  и электрическое поле  $E \propto \beta$  убывают. В характерном режиме  $j(x, t) \propto \rho_s^{-1} \propto t^{-1/3}$ . Найдены также стационарные распределения при безынжекционной генерации солитонов в слое пиннинга при прохождении тока ВЗП.

В четвёртой главе **Сильно коррелированные низко-размерные системы** рассмотрены проблемы переноса тока и спина возмущениями в одномерных коррелированных системах, используя квазиклассические методы для модели Пайерлса, методы бозонизации для моделей типа Латтинжера и точные (анзац Бете) для модели Хаббарда и спиновых моделей.

Исследуются солитонные состояния в системах с волной спиновой плотности. Найдены профиль, заряд, спин солитонов в системе с линейно поляризованной волной спиновой плотности. Показано, что солитонный профиль, зарядовые и спиновые свойства такие же как у кинка в ВЗП системах. В зависимости от заполнения электронной зоны солитоны могут иметь спин и/или заряд. Возможные типы солитонов в системах с геликоидальной волны спиновой плотности описаны.

Проведено квазиклассическое квантование солитонов (кинков, поляронов) модели Пайерлса, показано, что электрический заряд возмущений в общем случае нецелый.

Разделение спиновых и зарядовых степеней свободы в методе бозонизации:  $H_0 = H(\varphi) + H(\sigma)$  (где  $\varphi = (\varphi_\uparrow + \varphi_\downarrow)/2$  и  $\sigma = (\varphi_\uparrow - \varphi_\downarrow)/2$  - зарядовое и спиновое поля) является следствием линеаризации спек-

тра вблизи Ферми-поверхности.

$$H(\varphi) \approx \frac{a}{2}(\partial_x \varphi)^2 + \frac{b}{2}\pi_\varphi^2; \quad H(\sigma) \approx \frac{c}{2}(\partial_x \sigma)^2 + \frac{d}{2}\pi_\sigma^2,$$

где в пределе слабой связи  $a, b, c, d \sim 1$ . Оператор электрического тока зависит только от зарядового поля и линеен по полю  $j = (\pi/2)^{1/2}\pi_\varphi$ . Следствием этого является отсутствие тока в состоянии со спиновыми или зарядовыми (частично-дырочными) возбуждениями, что противоречит проделанным вычислениям для точно решаемой модели Хаббарда.

Для модели Хаббарда вычислены токи спиновых (синглетных и триплетных) и зарядовых (дырочных и частичных) возбуждений. Во всех случаях возбуждения переносят ток  $j \propto p$  (для  $p \ll 1$ ), кроме случая наполовину заполненной зоны ( $\rho = 1$ ), где только состояния с добавленной в систему частицей переносят ток.

Показано, что учет нелинейности электронного спектра в бозонизационном подходе приводит к взаимодействию спинового и зарядового каналов и разрешению противоречия между бозонизационными и точными результатами. Гамильтониан приобретает вид  $H_0 \rightarrow H_0 + \delta H$ , где

$$\delta H \sim \Gamma : \left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^3 + 3 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + \pi_\varphi^2 + \pi_\sigma^2 \right] + 6\pi_\varphi \pi_\sigma \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) \right\} :,$$

где дисперсия скорости Ферми  $\Gamma = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial k^2} |_{k_F} \approx \cos \frac{\pi \rho}{2}$ , для модели Хаббарда. Электрический ток изменяется как

$$j \Rightarrow j + \delta j, \quad \delta j \sim -\Gamma : \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \pi_\varphi + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \pi_\sigma \right) :,$$

что приводит к переносу электрического тока спиновыми (и зарядовыми) возбуждениями, с величиной пропорциональной импульсу возбуждения и дисперсии спектра на поверхности Ферми (точке в одномерном случае)  $j \sim \Gamma p$ , в соответствии с точными результатами.

Исследовано влияние нелинейности электронного спектра на магнитные свойства систем со щелью в спиновом канале: показано, что магнитная восприимчивость становится конечной вместо корневой сингулярности при полях выше порогового. Результаты согласуются с точ-

ными вычислениями, проведенными для одномерной модели Хаббарда с притяжением..

Найдены точные решения для четырех 19-вершинных решеточных моделей, соответствующих квантовым спиновым  $S = 1$  коррелированным цепочкам. Вычислены статсуммы, энергии возбуждений, критические индексы.

Рассмотрены периодические осцилляции Фриделя, вызванные примесями в модели Калоджеро-Сазерланда с  $BC_N$  симметрией. Вычислена точно одночастичная матрица плотности, исследована катастрофа ортогональности. Результаты находятся в соответствии с предсказаниями конформной теории поля.

Рассмотрены динамические свойства краевых состояний в целочисленном ( $\nu = 1$ ) и дробном ( $\nu = 1/2m + 1$ ) квантовом эффекте Холла, описываемой киральной моделью Латинжера. Исследовано влияние зависящего от времени локального возмущения на основное состояние. Показано, что катастрофа ортогональности происходит между начальным и конечным состояниями  $|\langle i|f \rangle| \sim L^{-\frac{1}{2\nu}(\frac{\delta}{\pi})^2}$ , где  $\delta$  – фазовый сдвиг на примесном потенциале. Вычислены интенсивность поглощения рентгеновских лучей с переходом электронов на краевые состояния. Вычислена нелинейная вольт-амперная характеристика для туннелирования между Ферми-жидкостью и краевыми состояниями.

В пятой главе **Полосатая фаза в одномерных и двумерных моделях** исследуются периодические структуры плотности спина и заряда в квазиодномерных и двумерных легированных антиферромагнетиках и сверхпроводниках. Такие полосатые структуры экспериментально наблюдались в ряде соединений купратов, например  $La_{2-x}Ba_xCuO_4$ ,  $La_{1.6-x}Nd_{0.4}Sr_xCuO_4$ . Периодическая сверхструктура полос спиновой и/или зарядовой плотности в слабо допированных дырками сверхпроводящих купратов может конкурировать/сосуществовать со сверхпроводимостью. Наличие индуцированного магнитного упорядочения обнаружено в сверхпроводящей фазе в области существования вихревой решетки в магнитном поле в соединениях YBCO,  $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$ .

В первом разделе исследуется солитонная сверхструктура, возни-

кающая при легировании антиферромагнетика в рамках одномерной модели Хаббарда с одноузельным отталкиванием ( $U > 0$ ):

$$H_0 = t \sum_{\langle i,j \rangle \sigma} c_{i,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma} + U \sum_i \left( \frac{1}{4} \hat{n}_i^2 - (\hat{S}_i^z)^2 \right) \quad (9)$$

В самосогласованном приближении решаются уравнения Боголюбова-де Жена, находится основное состояние в зависимости от легирования (концентрации дырок  $n_h = |\rho - 1|$ ). При малой концентрации система представляет собой периодическую структуру доменных стенок (кинков):  $\langle S_z \rangle \sim (-1)^n \tanh x/\xi$ , разделяющих антиферромагнитные домены. При увеличении концентрации

$$\langle S_z \rangle \sim (-1)^n sn(\Delta_0 x / \sqrt{q}, q), \quad (10)$$

где  $sn(\Delta_0 x / \sqrt{q}, q)$  – эллиптическая функция Якоби с параметром  $0 < q < 1$ :  $2K(q)\sqrt{q}/\Delta_0 = 1/|\bar{\rho} - 1|$ . Плотность электрического заряда при этом  $\rho(x) \sim \langle S_z \rangle^2$ , так что период спиновой структуры  $l = 2/|\rho - 1|$  всегда в два раза больше периода модуляций заряда. (См. Рис. 2)

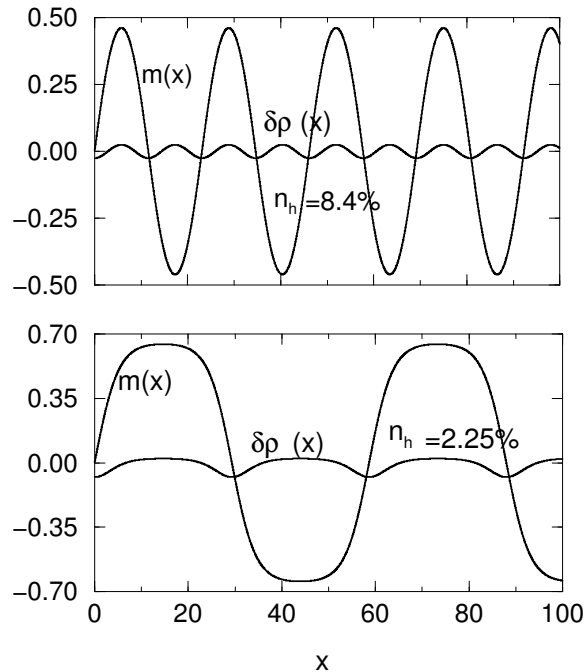


Рис. 2: Спин-зарядовая сверхструктура при различных концентрациях дырок.

Во втором разделе рассмотренная модель обобщена, включены сверх-

проводящие корреляции

$$H = H_0 \sum_i \Delta_s(i) c_{i,\uparrow}^\dagger c_{i,\downarrow}^\dagger + h.c.,$$

где  $\Delta_s(x)$  – сверхпроводящий параметр порядка. Аналитические решения для распределения спина, заряда и сверхпроводящего параметра порядка найдены. Основным состоянием модели при низкой концентрации дырок является периодическая структура распределения заряда и спина. Увеличение легирования приводит к фазовому переходу в сверхпроводящее состояние. Существует интервал допирования в котором сосуществуют сверхпроводимость, и периодическая модуляция в виде волн спиновой и зарядовой плотности. Показано, что модуляция плотности заряда присутствует вблизи вихрей (кинков в одномерной модели) в сверхпроводящей фазе

В третьем разделе рассматривается самосогласованная двумерная модель, основанная на микроскопической модели Хаббарда, учитывающая в приближении слабой связи как распределение спиновой и зарядовой плотности, так и сверхпроводящие корреляции с  $d_{x^2-y^2}$  симметрией параметра порядка. Модель является обобщением выше рассмотренных одномерных моделей. Получены аналитические решения уравнений Боголюбова-де Жена для спин-заряд фазы волны плотности в отсутствие сверхпроводимости ("полосатая" и "шахматная" структуры), а также решения, описывающие периодические модуляции спина и заряда в сверхпроводящей фазе.

В заключении изложены основные выводы, которые могут быть сделаны из представленного цикла исследований.

## ВЫВОДЫ

1. Свойства Бозе-конденсата в режиме вихревой решетки существенно отличаются от обычного двумерного Бозе-газа. Уже при нулевой температуре матрица плотности спадает степенным образом, а при конечной - экспоненциально. Спектр низколежащих возбуждений квадратичен по импульсу, в отличие от линейного для газа.

При конечных температурах длина, на которой вихревая решетка упорядочена, экспоненциально большая и может превышать экспериментальный размер системы.

2. В электрон-фононных системах с оптическими и звуковыми фононными модами (соизмеримые и несоизмеримые ВЗП) псевдощель, наблюдаемая в спектрах PES, ARPES, оптического поглощения, межцепочечного туннелирования простирается далеко вглубь запрещенной зоны до частот, связанных с энергиями стационарных возбуждений (солитонов, поляронов). Наблюдаемый экспериментально в спектре поперечного туннелирования пик на энергии солитона может интерпретироваться как прямое наблюдение микроскопических солитонов в ВЗП системах.
3. Показано, что солитоны в кристаллах ВЗП притягиваются и образуют дислокационные петли. Построена теория дислокаций в кристаллах ВЗП. Вблизи металлической поверхности энергетически выгодно образование периодической дислокационной структуры.
4. Заряд, переносимый стационарными возбуждениями (солитонами, поляронами) в общем случае нецелый, величина его зависит от фактора заполнения и констант взаимодействия.
5. Разделение спиновых и зарядовых степеней свободы в методе бозонизации является результатом линеаризации спектра вблизи Ферми-поверхности. Учет нелинейности электронного спектра приводит к взаимодействию спинового и зарядового каналов. В результате спиновые возбуждения переносят электрический ток, пропорциональный импульсу и дисперсии скорости Ферми, в соответствии с полученными точными результатами для модели Хаббарда.
6. Во взаимодействующих системах со щелью в спиновом канале учет нелинейности спектра приводит к конечной магнитной восприимчивости при пороговом значении магнитного поля, в отличие от корневой сингулярности получаемой при пренебрежении дисперсией Ферми скорости.
7. Найдены точные решения для четырех 19-вершинных решеточ-

ных моделей, соответствующих квантовым спиновым  $S = 1$  коррелированным цепочкам. Вычислены статсуммы, энергии возбуждений, критические индексы.

Исследованы эффекты примеси в модели Калоджеро-Сазерланда: катастрофа ортогональности, осцилляции Фриделя. Вычислены точно корреляционные функции.

Исследовано влияние зависящего от времени локального возмущения на краевые состояния в целочисленном ( $\nu = 1$ ) и дробном ( $\nu = 1/2m + 1$ ) квантовом эффекте Холла. Исследованы: катастрофа ортогональности, коэффициент поглощения рентгеновских лучей с переходом электронов на краевые состояния, нелинейная вольт-амперная характеристика для туннелирования между Ферми-жидкостью и краевыми состояниями.

8. Получено самосогласованное аналитическое решение (в зависимости от концентрации дырок) для спин-зарядовой солитонной сверхструктуры (stripes) в квазиодномерной системе в рамках модели Хаббарда.

В предложенных одно- и двумерных моделях, включающих сверхпроводящие корреляции, получены, в зависимости от концентрации дырок, аналитические решения, описывающие экспериментально наблюдаемую полосатую фазу (stripes), сверхпроводящую фазу, область сосуществования сверхпроводящего и антиферромагнитного параметра порядка.

## СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ

1. S. I. Matveenko, G. V. Shlyapnikov, "Tkachenko modes and their damping in the vortex lattice regime of rapidly rotating bosons", Phys. Rev. A **83**, 033604 (2011).
2. S. I. Matveenko, "Vortex structures of rotating Bose-Einstein condensates in an anisotropic harmonic potential", Phys. Rev. A **82**, 033628 (2010).
3. S. I. Matveenko, D. Kovrizhin S. Ouvry and G. V. Shlyapnikov, "Vortex structures in rotating Bose-Einstein condensates", Phys. Rev. A **80**, 063621 (2009).
4. S. Brazovskii, S. I. Matveenko, "Theory of subgap interchain tunneling in quasi 1D conductors", S. Brazovskii, S. I. Matveenko, Phys. Rev. B **77**, 155432 (2008).
5. S. Brazovskii, Yu. I. Latyshev, S. I. Matveenko and P. Monceau, "Recent views on solitons in Density Waves", J. Phys. IV France, **131**, 77 (2005).
6. S. I. Matveenko and S. Brazovskii, "Subgap tunneling through channels of polarons and bipolarons in chain conductors", Phys. Rev. B **72**, 085120 (2005).
7. S. A. Brazovski , S. I. Matveenko, "Pseudogaps in Incommensurate Charge Density Waves and one-dimensional semiconductors", ЖЭТФ **123**, 625. (2003)
8. S. I. Matveenko, S. A. Brazovskii, "A theory of the subgap photoemission in one-dimensional electron-phonon systems. An instanton approach to pseudogaps", Phys.Rev.B **65**, 245108 (2002).
9. S. Brazovskii, S. Matveenko, "Space-time distributions of solitons in the current conversion problem in CDW", Journal de Physique I **2**, 725 (1992).
10. S. Brazovskii, S. Matveenko, "The charge density wave structure near a side metal contact", Journal de Physique I **2**, 409 (1992).
11. S. Brazovskii, S. Matveenko, "On the current conversion problem in charge density wave crystals. II. Dislocations", Journal de Physique I **1**, 1173 (1991).



12. S. Brazovskii, S. Matveenko, "On the current conversion problem in charge density wave crystals. 1. Solitons", *Journal de Physique I* **1**, 269 (1991).
13. S. Brazovskii, S. Matveenko, "Quantization and the soliton charge in the Peierls model", *ЖЭТФ* **96**, 229 (1989).
14. S. Brazovskii, S. Matveenko, "Amplitude solitons in Spin Density Wave systems", *ЖЭТФ* **95**, 1839 (1989)
15. T. Vekua, S. I. Matveenko, and G. V. Shlyapnikov, "Curvature Effects on Magnetic Susceptibility of 1D Attractive Two Component Fermions", *Письма в ЖЭТФ* **90**, 315 (2009).
16. H. Frahm, S. I. Matveenko, "Correlation functions in the Calogero–Sutherland model with open boundaries", *European Physical Journal B* **5**, 671 (1998).
17. S. I. Matveenko "Electric currents of excitations in one-dimensional attractive Hubbard model", *ЖЭТФ* **113**, 204 (1997).
18. A. V. Balatsky, S. I. Matveenko, "Dynamical properties of quantum Hall edge states", *Phys. Rev. B* **52**, 8676 (1995).
19. A. Klümper, S. I. Matveenko, J. Zittartz, "Exact solutions of integrable 19-vertex models and spin-1 quantum chains", *Zeitschrift fur Physik B* **96**, 401 (1995).
20. S. Brazovskii, S. Matveenko, P. Nozieres, "Spin excitations carry charge currents: one dimensional Hubbard model", *J.de Physique I* **4**, 571 (1994).
21. S. I. Matveenko, S. A. Brazovskii, "Quasiparticle currents in one - dimensional correlated models", *ЖЭТФ* **105**, 1653 (1994).
22. S. I. Matveenko, "Electric current due to the excitations in the Hubbard model", *ЖЭТФ* **94**, 213 (1988).
23. S. I. Matveenko, "Superconductivity, Spin and Charge Density Structures in One and Two-Dimensional Self-Consistent Models", *International Journal of Modern Physics, B* **23**, 4297 (2009); (arXiv:1111.4139).
24. S. I. Matveenko, "Stripes and superconductivity in one-dimensional self-consistent model", *Письма в ЖЭТФ*, **78**, 837 (2003).

25. S. I. Mukhin, S. I. Matveenko, "Stripe phase: analytical results for weakly coupled repulsive Hubbard model", *Int. J. Mod. Phys. B* **17**, 3749 (2003).
26. S. I. Matveenko, S. I. Mukhin, "Analytical stripe phase solution for the Hubbard model", *Phys. Rev. Lett.* **84**, 6066 (2000).