На правах рукописи

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ИМ. Л.Д. ЛАНДАУ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Алешкин Константин Романович

Специальная Кэлерова геометрия и теории Ландау-Гинзбурга

По специальности: 01.04.02 – «Теоретическая физика»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный Руководитель

Белавин Александр Абрамович,

д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. РАН

Москва – 2019

Оглавление

Введение

Данная работа посвящена применению геометрических методов для изучения бэкграундов теории струн. Работа разделена на три главы. Первая содержит краткое введение в теорию струн и переформулировку физических проблем в геометрических терминах. Основная часть работы содержится во второй главе. Она посвящена основному объекту исследования, а именно специальной Кэлеровой геометрии, которая определяет константы связи низкоэнергетической теории струн в бэкграунде компактификации на многообразие Калаби-Яу. В этой главе мы объясняем новый метод вычисления специальной геометрии, использующий связь с суперсимметричными теориями Ландау-Гинзбурга, и применяем его к большому числу струнных бэкграундов. Наконец в третьей части мы изучаем недавний подход к специальной геометрии основанный на связи суперструнных компактификаций с определёнными линейными сигма моделями, вычисления в которых проводятся с использованием суперсимметричной локализации.

Актуальность темы исследования. В теории суперструн сосредоточена значительная часть исследований математической и теоретической физики последних нескольких десятилетий. За это время теория струн позволила пролить свет на множество интегрируемых и суперсимметричных физических теорий в разных размерностях, а также спровоцировала большой скачок в математике.

Специальная геометрия является одним из важных объектов, который позволяет как вычислять корреляционные функции в соответствующих физических теориях, изучать различные дуальности, так и является важной математической характеристикой многообразий Калаби-Яу и входит в предмет исследования зеркальной симметрии.

Цель работы. На протяжении всего развития теории струн существенную роль в ней играют дуальности: T-дуальность, S-дуальность, AdS/CFT соответствие, интегрируемые дуальности, зеркальная симметрия, симплектическая дуальность и другие. Дуальности основаны на том, что одна и та же физическая теория может иметь совершенно различные описания, возможно, в разных режимах. В таком случае можно использовать методы каждого из описаний для исследования теории. Основной целью данной работы является применение дуальности Ландау-Гинзбург – Калаби-Яу для исследования специальной геометрии, возникающей при компактификации теории струн на многообразия Калаби-Яу.

Задачи научно-квалификационной работы. В первой части работы после построения соответствующего формализма мы предложим эффективный метод вычисления специальной Кэлеровой геометрии и применим его в ряде примеров. Затем мы проведём вычисления статистических сумм в специальных линейных сигма моделях и, с помощью зеркальной симметрии, построим соответствие со специальной геометрией многообразий Калаби-Яу изученных в основной части работы.

Научная новизна. Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Разработан новый эффективный метод вычисления специальной Кэлеровой геометрии на пространстве модулей комплексных структур многообразий Калаби-Яу.

2. Проведено вычисление специальной геометрии в окрестности орбифолдных точек для ряда различных многообразий Калаби-Яу. В случае трёхмерной квинтики в проективном пространстве вычислена специальная геометрия на 101-мерном пространстве модулей. Для гиперповерхностей типа Ферма проведено вычисление для всех полиномиальных деформаций комплексных структур. Для многообразий Калаби-Яу типа Берглунда и Хубша, то есть задаваемых обратимыми особенностями во взвешенных проективных пространствах, найдена формула для метрики специальной геометрии при определённых ограничениях на полиномиальные деформации комплексной структуры.

3. Построены линейные калибровочные сигма модели зеркально двойственные гиперповерхностям Ферма. Явна посчитаны статистические суммы таких теорий на сфере, предъявлено зеркальное отображение, при котором статсумма совпадают с экспонентой Кэлерова потенциала специальной Кэлеровой метрики для соответствующей гиперповерхности Ферма. Таким образом проверена гипотеза о связи статсуммы линейной калибровочной сигма модели и специальной геометрии нелинейной сигма модели.

Научная и практическая значимость. Оригинальное вычисление специальной геометрии проведённое в работе Канделаса повлекло значительный толчок к развитию зеркальной симметрии - соответствию геометрии Кэлеровых и комплексных модулей различных многообразий Калаби-Яу. С тех пор роль специальной геометрии стала понятна во многих областях физики суперструн и математики. В частности, она необходима для описания квазиреалистичных вакуумов теории суперструн, которые претендуют на феноменологию Стандартной Модели.

Апробация работы. Основные результаты научно-квалификационной работы докладывались автором на семинаре сектора квантовой теории поля ИТФ РАН, семинаре “Интегрируемые структуры в статистических и полевых моделях” в Институте Проблем Передачи Информации. Также отдельные части докладывались на ряде конференций и семинаров. В частности: семинар группы интегрируемых систем в SISSA, Триест; конференция “Categorical and Analytic Invariants in Algebraic Geometry V”, Osaka, семинар “Mathstring”

IPMU, Токио; аспирантский семинар Caltech, Пасадина; семинар по математической физике в Высшей Школе Экономики, семинар по математической физике в Сколтехе, конференция “StringMath”, Сендай; семинар “Современные геометрические методы” в МГУ.

Публикации и личный вклад автора. Данный текст отражает результат работы автора совместно с научным руководителем и коллегами. Большая часть представленных результатов опубликована в работах [1–5]

Структура научно-квалификационной работы. Первая глава 1 этой работы является введением. В ней мы формулируем физические вопросы теории струн на геометрическом языке и развиваем необходимый математический формализм. Факты изложенные в этой главе являются переизложением хорошо известных в литературе по теории струн построений. После исторического введения в разделе 1.1 мы, следуя классикам, начинаем описание теории струн с точки зрения конформной теории поля на мировом листе. В частности, мы обсуждаем суперсимметрию в теории струн, ГСО-проекцию, и построение безмассового сектора в плоском бэкграунде. Во второй части главы мы переходим к описанию с точки зрения таргет-пространства и низкоэнергетических эффективных теорий супергравитации. Мы объясняем феномен струнной компактификации, которая интерпретируется как определённый класс суперсимметричных бэкграундов теории, а также объясняем роль многообразий Калаби-Яу в этой конструкции. Дальше, в разделе 1.4 мы приводим свойства многообразий Калаби-Яу, которые оказываются необходимы для изучения струнных компактификаций и показываем, как геометрия этих многообразий определяет физику безмассового сектора теории.

Глава 2 этой работы является основной и содержит бóльшую часть результатов. Она начинается с описания основного объекта исследования данной работы - специальной Кэлеровой геометрии и того, как она возникает в теории суперструн в контексте первой главы, после чего мы рассматриваем специальную геометрию в контексте нелинейных сигма моделей в разделе 2.1.1. Там же мы описываем математические объекты, связанные со специальной геометрией, которые также естественно появляется в теориях Ландау-Гинзбурга и топологических теориях поля, а именно Фробениусовы многообразия и tt^*-геометрию.

После этого, в разделе 2.2 мы переходим к описанию непосредственно теорий Ландау-Гинзбурга, которые мы будем использовать для вычисления специальной геометрии для нелинейных сигма моделей. Наконец, результаты автора этой работы представлены в разделе 2.3.

На хорошо известном примере зеркальной квинтики, где вычисления специальной геометрии уже были проделаны, мы объясняем основные идеи нашего метода. В частности, киральные кольца $\mathcal{R}_0^Q$, представление периодов через осциллирующие интегралы, понятие вещественной структуры $M_i^{\bar{j}}$ на киральном кольце и основную рабочую формулу для специальной геометрии (2.3.72).

После описания нашего метода и вычисления для случая зеркальной квинтики, мы переходим к самой квинтике, для которой первое вычисление специальной геометрии появилось в совместной работе автора с научным руководителем [4]. В этом же разделе мы демонстрируем ещё один способ вычисления вещественной структуры основанный на монодромии и получаем явную формулу для специальной геометрии (2.3.122).

Следующая серия примеров - гиперповерхности Ферма, которые существенно обобщают пример квинтики. Среди трёхмерных многообразий Калаби-Яу имеется почти сто топологически различных гиперповерхностей заданных уравнением типа Ферма. Обобщение нашего метода на эти случаи не составляет труда. Единственное осложнение заключается в том, что для многообразий такого типа все модули комплексных структур не всегда реализуются полиномиальными деформациями, а наш метод работает именно с такими. Демонстрируя ещё один метод вычисления вещественной структуры мы получаем ответ для специальной геометрии (2.3.161).

Последний и самый общий случай, для которого мы используем наш метод в этой работе носит название обратимых особенностей или случая Берглунда и Хубша. Количество таких многообразий в трёх измерениях составляет несколько тысяч. Накладывая некоторые ограничения на вид полиномиальных деформаций или самого многообразия мы естественно обобщаем наши рассуждения, используем очередной метод для нахождения вещественной структуры и получаем формулу (2.3.204).

Вторая глава данной работы заканчивается заключением, где мы формулируем часть приложений наших формул, а также намечаем направления дальнейших исследований.

Глава 3 посвящена связи специальной геометрии и суперсимметричной локализации. Ещё давно Виттен показал, что как теории Ландау-Гинзбурга, так и нелинейные сигма модели можно получать определёнными пределами так называемых линейных калибровочных сигма моделей (ЛКСМ). В частности через ЛКСМ можно проследить соответствие топологически твистованных моделей. Относительно недавно две группы учёных: Бенини, Кремонези и Гомиз с Дороудом провели вычисления статистической суммы ЛКСМ на двумерной сфере с круглой метрикой. Джокерс с соавторами высказали гипотезу, которая связывает эту статсумму со специальной геометрией Кэлеровых модулей. В начале главы мы обсуждаем ЛКСМ, которые будут использоваться в дальнейшем. Во второй части главы мы обсуждаем зеркальную симметрию в подходе Батырева, после чего модифицируем конструкцию так, чтобы построить явно ЛКСМ, которые соответствуют зеркальным образам квинтики и всех гиперповерхностей типа Ферма. После чего мы проводим вычисления статсуммы на сфере и предъявляем зеркальное отображение, при котором эта статсумма совпадает с точностью до несущественного множителя, с экспонентой Кэлерова потенциала специальной метрики (3.2.16), (3.2.31). Таким образом, с одной стороны мы получаем независимую проверку гипотезы Джокерса в большом числе случаев, а с другой получаем ещё одно удобное выражение для специальной геометрии.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения и трёх глав, содержит 152 страницы, включая 8 рисунков и список литературы из 94 наименований.

Глава 1

Глава 1 : Компактификация в теории струн

1.1 Введение

Теория струн изначально возникла в изучении сильных взаимодействий в 70х годах в работах [73, 80, 88, 89] и других, но затем уступила место калибровочным теориям. Однако, в процессе работы над теорией было замечено, что определённые состояния аналогичны фотонам и гравитонам в пространстве-времени, что послужило толчком к дальнейшим исследованиям с приложением к объединению электромагнитного и гравитационного взаимодействий.

Оказалось, что “бозонный” вариант теории не имеет конформной аномалии только в размерности таргет-пространства 26 [78,79], а также нестабилен, в частности среди состояний теории имеются тахионы. Добавление суперсимметрии в теорию и применение ГСО проекции [46] позволило определить на языке двумерной конформной теории поля теорию с таргет-пространством размерности 10, а также не содержащую тахионных состояний. При низких энергиях теория приближается 10-мерной теорией супергравитации.

В работах [19, 48, 52], повлёкшей так называемую первую струнную революцию, был показан рецепт, как из теории суперструн можно получить квазиреалистичные четырёхмерные теории супергравитации с калибровочными группами содержащими калибровочную группу Стандартной Модели $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$. А именно, в работах использовалась *гетеротическая* $E_8 \times E_8$ теория струн, являющаяся определённой комбинацией бозонной струны и суперструны, а также предлагались бэкграунды основанные на геометрии 6-мерных многообразий Калаби-Яу подходящего размера, которые допускали в низкоэнергетическом пределе описание N=1 4d супергравитации (компактификация на многообразие Калаби-Яу).

В бэкграундах такого типа константы связи четырёхмерной теории описываются в терминах геометрии компактифицирующего многообразия Калаби-Яу. Более того, эти константы можно вычислить точно вместе с квантовыми поправками благодаря теоремам о неперенормируемости в суперсимметричных теориях. Такие константы связи являются основным объектом исследований в данной работе.

Несмотря на значительные успехи, достигнутые во время струнной революции, получившиеся теории обладали большим количеством недостатков. В частности, было не до конца понятно, как редуцировать структурную группу E_6 до группы стадартной модели так, чтобы частицы в представлениях этой группы имели реалистичные квантовые числа. Пожалуй ещё более существенной проблемой является так назывемая проблема стабилизации модулей и связанная с ней проблема нарушения суперсимметрии. При компактификации на бэкграунд Калаби-Яу, в получающейся теории имеется большое число безмассовых полей (модулей), а также ненарушенная суперсимметрия. Процесс обретения массы у этих полей называется стабилизацией модулей. Понятно, что этот процесс должен описываться в терминах струнной конструкции.

Насколько известно автору, до сих пор в гетеротических теориях так и не получилось непосредственно стабилизировать все модули.

В дальнейшем, были открыты дуальности между различными теориями струн и введёны концепты М-теории и F-теории. При этом значительную роль играют *браны*, чаще всего D-браны и NS5-браны. Браны - это протяжённые объекты в теории струн, которые играют роль граничных условий для открытых струн, и которые можно считать частью бэкграунда теории или определёнными когерентными состояниями в М-теории (с известной долей условности). Это получило название второй струнной революции.

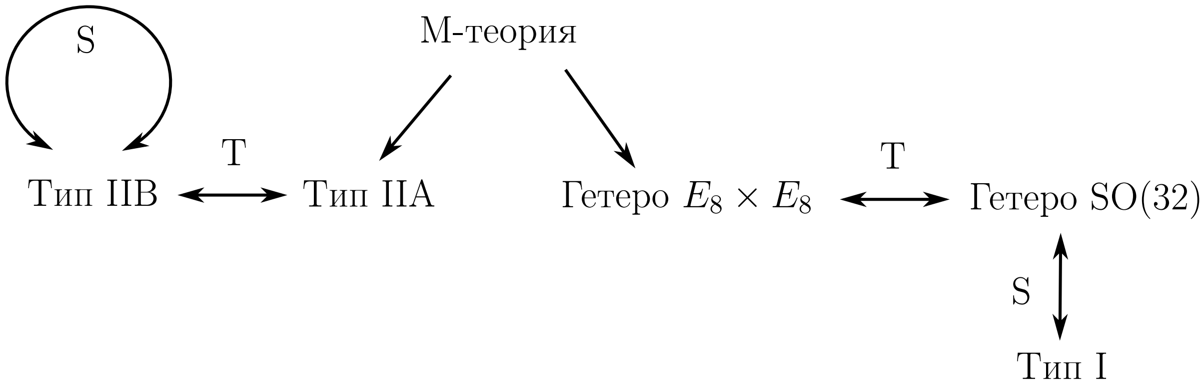


Рис. 1.1: Диаграмма дуальностей в теории струн

В это время получил развитие второй способ построения квазиреалистичных четырёхмерных теорий в теории суперструн, так называемые сценарии “мира на бране” [81, 82]. В отличие от гетеротических компактификаций, где калибровочная группа появлялась за счёт бозонного сектора струны, а поколения частиц возникали за счёт наличия гармонических дифференциальных форм через процедуру Калуцы-Клейна, в сценариях мира на бране четырёхмерная физика появляется из сектора открытых струн прикреплённых к стопке четырёхмерных бран (что и дало название этому методу). Этот метод лучше всего работает в теориях типа II, особено в струне типа IIB и F-теории, а также в теории типа I. Наиболее существенных результатов удалось добиться в сеттинге ККЛТ [44, 59], а также в сценарии большого объёма [8]. В сценариях мира на бране пространство-время также должно быть многообразием Калаби-Яу, чтобы допускать суперсимметричный бэкграунд теории, а геометрия многообразия также оказывает влияние на суперсимметричную теорию, и конечно же, все модули также должны быть стабилизированы. Класс допустимых многообразий Калаби-Яу дополнительно ограничивается требованиями наличия подходящих бранных конфигураций для реализации полей Стандартной Модели.

Вычисление констант связи в теориях любого из описанных выше типов требует знания геометрии компактифицирующего многообразия. Эта геометрия условно разбивается на два класса - геометрия кэлеровых структур (А-модель) и геометрия комплексных структур (Б-модель). Несмотря на то, что ни для одного многообразия Калаби-Яу Риччи-плоская метрика (которая является частью суперсимметричного бэкграунда в теории струн) не известна аналитически, необходимые константы связи оказывается возможным вычислить ввиду того, что они выражаются через когомологические данные. В частности, в А-модели константы связи выражаются через так называемые инварианты Громова-Виттена, или числа голоморфных струнных инстантонов на многообразии, а в Б-модели через периоды (интегралы по замкнутым циклам) дифференциальных форм половинной размерности. Т-дуальность в теории струн, носящая имя зеркальной симметрии, удивительным образом связывает А-модель и Б-модель на разных многообразиях Калаби-Яу, позволяя проводить вычисления в А-модели с помощью Б-модели и наоборот.

В данной работе основной акцент сделан именно на Б-модели ввиду того, что вычисления в них проще провести явно, а также ввиду зеркальной симметрии. Для того, чтобы вычислять геометрию многообразий Калаби-Яу оказывается удобно воспользоваться ещё одной дуальностью, а именно Ландау-Гинзбург - Калаби-Яу соответствием. В литературе имеются различные утверждения с этим названием. Мы будем пользоваться его вариантом, встречающимся ещё у Гепнера [41]. Идея Гепнера заключается в том, что два описания теории струн: с точки зрения конформной теории на мировом листе и с точки зрения нелинейной сигма-модели на Калаби-Яу должны быть эквивалентны, а именно, для большого класса многообразий Калаби-Яу можно непосредственно построить конформную теорию на мировом листе, которая реализует соответствующую сигма-модель.

Для многообразий рассматриваемого в этой работе типа конформные теории являются инфракрасными точками ренормгруппового потока N=2 суперсимметричных теорий Ландау-Гинзбурга (их орбифолдов, если быть точным).

Соответствия такого типа активно используются как в физической так и в математической литературе [31, 93]. С математической точки зрения это соответствие опирается на также хорошо известное соответствие периодов и экспоненциальных периодов, которое возникает в изучении теории особенностей [50, 66]. Периоды (экспоненциальные периоды) с физической точки зрения являются одноточечными корреляционными функциями киральных полей на диске с определёнными суперсимметричными граничными условиями (прикреплёнными к определённым бранам), связанными с циклами интегрирования. В частности, при вставке единичного оператора на диск, такие корреляционные функции вычисляют центральные заряды (массы) бран, которые задают граничные условия.

Оказывается, что вычисления в теориях Ландау-Гинзбурга намного проще, чем аналогичные вычисления в нелинейных сигма-моделях. В теориях Ландау-Гинзбурга константы связи выражаются через осциллирующие интегралы в плоских пространствах по циклам связанным с напёрстками Лефшеца и зачастую сводятся к произведению легко берущихся одномерных интегралов, что и будет активно использоваться.

Литература по вычислению периодов и осциллирующих интегралов довольно обширна, и сами периоды в интересующих нас случаях являются обобщёнными гипергеометрическими функциями от параметров деформации Калаби-Яу. Сферические корреляционные функции задают двухточечные функции четырёхмерной низко-энергетичной модели, и непосредственно связаны с метрикой Замолодчикова на пространстве деформаций конформных теорий поля. Эти двухточечные функции также известны под названием tt^* геометрии или, в конкретном случае, специальной Кэлеровой геометрии. Эти корреляционные функции были вычислены только в малом числе случаев и для очень маленького количества суперполей (параметров деформации).

Основная цель этой работы - заполнить этот пробел, а именно, автором совместно с коллегами был разработан способ вычисления метрики Замолодчикова применимый в большом классе примеров [1–5].

Первая глава работы - введение в проблему компактификации на многообразия Калаби-Яу и описание сопутствующих физических и математических вопросов.

Вторая глава настоящей работы содержит описание метода и его применения в явных вычислениях, а также различные вычисления использующие полученную метрику (гиперповерхности во взвешенных проективных пространства).

Третья глава посвящена дополнительным вопросам таким, как связь нелинейных сигма моделей на Калаби-Яу с линейными калибровочными сигма моделями (ЛКСМ) и вычислениями сферической статсуммы, зеркальной симметрии.

1.2 Суперсимметрия в теории суперструн

Подход функционального интеграла к теории струн Теория струн исторически строилась как теория двумерного мирового листа - аналога мировой линии релятивистской частицы. Символически, статсумму общей теории струн можно записать в виде интерала по путям:

$$Z = \int \frac{D(\text{двумерная поверхность } \Sigma, \text{ поля материи на } \Sigma)}{\text{объём группы диффеоморфизмов}} \exp(-\frac{1}{h}[S_{mat}+S_{grav}]), \tag{1.2.1}$$

где S_{mat} - это ковариантизованное действие “материи”, а S_{grav} действие теории гравитации соответственно. Интеграл берётся по всем возможным классам (Σ, g) двумерной поверхности и метрики на ней, а также по всем конфигурациям полей материи на данной поверхности. Одно из основных предположений теории заключается в том, что ещё *до* каплинга теории материи к гравитации, теория должна быть конформно инвариантной, поскольку внутренняя геометрия струны не должна сказываться на теории. Это означает, что след тензора энергии-импульса равен нулю $T_{11}^{mat} + T_{22}^{mat} = 0$.

Этот подход хорошо описан в работах А.Полякова [78,79], где интеграл по путям берётся с помощью введения репараметризационных духов с результатом

$$Z = \int D(\Sigma, g) D\phi Db Dc \exp(-\frac{1}{h}[S_{mat} + S_{Liouv} + S_{gh}]), \tag{1.2.2}$$

где введены духи b, c и дополнительное поле ϕ, которое играет роль конформного фактора метрики, его действие S_{Liouv} возникает из-за конформной аномалии в теории, то есть когда при квантовании классически конформно инвариантная теория материи теряет инвариантность. Функциональный интеграл берётся по конформным классам метрик, полям материи на римановой поверхности, и полю Лиувилля ϕ, которое имеет смысл конформного фактора полной квантовой метрики на поверхности, таким образом в этом подходе явно видно нарушение конформной симметрии.

Конформной аномалии не возникает, в случае, когда полный центральный заряд материи и духов равен нулю, что означает $c_m = 26$ для бозонной струны и $c_m = 15$ для суперструны. В критической теории струн функциональный интеграл берётся только по конформным классам поверхностей (по модулм римановых поверхностей) и полям материи/духам. Именно такие теории носят название критической теории струн и будут расматриваться в данной работе. Все вставки наблюдаемых на мировой лист струны должны быть проинтегрированы, что означает, что они должны преобразовываться как подходящие дифференциальные формы на пространстве модулей римановых поверхностей с проколами.

Конформная теория поля Несмотря на то, что аппарат конформной теории поля непосредственно почти не будет использоваться в дальнейшем тексте, для самозамкнутости и понимания различных рассуждений будет полезно его напомнить.

Рассмотрим двумерную теорию поля на римановой поверхности Σ снабжённой голоморфными координатами $z, \bar{z}$ с набором наблюдаемых $\{\Phi_i(z,\bar{z})\}_{i\in I}$. Мы ограничимся рассмотрением только *голоморфного сектора*, то есть z-зависимостью полей.

Ключевым понятием в конформной теории поля является *операторное разложение (OP)*. А именно, если в любом корреляторе вида

$$\langle \cdots \Phi_i(z)\Phi_j(w)\cdots \rangle \tag{1.2.3}$$

можно перенести точки z и w близко друг к другу используя (не всюду определённое) конформное преобразование [11]. При этом в пределе вклад от полей вставленных в эти точки эффективно сведётся к вкладу от одного локального поля вставленного в одну точку, таким образом можно записать

$$\langle \cdots \Phi_i(z)\Phi_j(w)\cdots \rangle = \sum_k C_{ij}^k(z-w)\langle \cdots \Phi_k(w)\cdots \rangle. \tag{1.2.4}$$

Это утверждение переписывается в терминах так называемого операторного разложения:

$$\Phi_i(z)\Phi_j(w) = \sum_k C_{ij}^k(z-w)\Phi_k(w), \tag{1.2.5}$$

которое выполняется при подстановке в любой коррелятор.

В каждой точке римановой поверхности действует алгебра конформных преобразований, или алгебра Витта:

$$\begin{gathered} l_n = -z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}, \\ [l_n, l_m] = (n-m)l_{n+m}, \end{gathered} \tag{1.2.6}$$

в частности, l_0 является оператором растяжения (в точке z=0) и l_{-1}, l_0, l_1 образуют подалгебру sl_2, на римановой сфере, эти операторы они интегрируются до глобальных конформных преобразований сферы. В квантовой теории операторы l_n перенормируются в L_n и их коммутационные соотношения модифицируются в силу конформной аномалии до соотношений алгебры Вирасоро:

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0}. \tag{1.2.7}$$

Тензор энергии импульса выражается через генераторы алгебры по формуле

$$T(z) = \sum_n L_n z^{-n-2}. \tag{1.2.8}$$

Он является ни чем иным, как T_{zz} компонентой полного тензора энергии импульса. Смешанная компонента исчезает $T_{z\bar{z}} = T^z_z = 0$, поскольку по определению в конформной теории след тензора энергии-импульса равен нулю.

Таким образом,

$$\oint \mathrm{d}u(z-u)^{n+1}T(u)\Phi_i(z) = L_n\Phi_i(z). \tag{1.2.9}$$

Все поля теории разбиваются на представления алгебры Вирасоро, старший вектор в которых (так называемое *примарное* поле) имеет следующее ОР с тензором энергии-импульса:

$$T(z)\Phi_i(0) = \frac{\Delta_i\Phi_i(0)}{z^2} + \frac{\partial\Phi_i(0)}{z} + reg., \tag{1.2.10}$$

то есть преобразуется как “тензор ранга Δ_i”. Последнее число называется конформной размерностью, важнейшей характеристикой поля. Все остальные поля в представлении преобазуются не как тензоры и называются (конформными) потомками примарного поля $\Phi_i(0)$. Потомки примарного поля Φ имеют вид $L_{-n_1}\cdots L_{-n_k}\Phi(0)$.

Сам тензор энергии-импульса не является примарным полем, а L_{-2} потомком единичного оператора. В частности, имеет место следующее операторное разложение

$$T(z)T(0) = \frac{c}{12z^4} + \frac{2T(0)}{z^2} + \frac{\partial T(0)}{z} + reg.. \tag{1.2.11}$$

Число c называется центральным зарядом конформной теории поля и выражает конформную аномалию. Квантовая поправка к следу тензора энергии-импульса пропорциональна центральному заряду умноженному на кривизну.

Подход мирового листа к теории суперструн В этом подразделе мы опишем теорию струн с точки зрения мирового листа основываясь на конформной теории поля по большей части следуя [12].

Для начала рассмотрим теорию суперструн в плоском пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,D}$. В этом подходе поля теории струн интерпретируются как координаты в таргет-пространстве, в котором “распространяется” струна. Теорию можно построить из действия Полякова в плоском пространстве:

$$S_{Pol} = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int \mathrm{d}^2z\left(\partial X^\mu\bar{\partial}X^\nu - i\bar{\psi}^\mu \not{D}\psi^\nu\right)\eta_{\mu\nu}, \tag{1.2.12}$$

где η - метрика в плоском пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,9}$.

Мы будем следовать подходу конформной теории свободных бозонов X_μ и фермионов ψ_μ, $1 \leq \mu \leq D+1$, которая характеризуется следующими операторными произведениями:

$$\begin{aligned} \partial X_\mu(z)\partial X_\nu(0) &= -\frac{\eta_{\mu\nu}}{z^2}, \\ \psi_\mu(z)\psi_\nu(0) &= \frac{\eta_{\mu\nu}}{z}, \end{aligned} \tag{1.2.13}$$

где $\eta_{\mu\nu}$ - метрика пространства Минковского. Фермионы имеют конформную размерность $1/2$, а потому при обходе вокруг начала координат могут менять знак: $\psi_\mu(e^{2\pi i}z) = e^{2\pi i\nu}\psi_\mu(z)$. В случае антипериодических на цилиндре граничных условий говорится, что вертексный оператор находится в NS (Невьё-Шварцевском) секторе, а в случае периодического условия в R (Рамоновском) секторе. Наличие секторов отражает выбор спин-структуры, в данном случае на проколотом диске с центром в начале координат. В случае NS сектора вертексные операторы имеют разложение по полуцелым модам

$$\psi_\mu(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_{n-1/2} z^{-n}, \tag{1.2.14}$$

а в случае R сектора по целым

$$\psi_\mu(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_n z^{-n-1/2}, \tag{1.2.15}$$

Тензор энергии-импульса теории имеет канонический вид

$$T^m(z) = -\frac{1}{2} : \partial X^\mu \partial X_\mu(z) : -\frac{1}{2} : \psi^\mu \partial \psi_\mu(z) :, \tag{1.2.16}$$

конформные размерности полей $\Delta(\partial X_\mu) = 1$ и $\Delta(\psi_\mu) = 1/2$ можно проверить из ОР с тензором энергии импульса, как и центральный заряд теории, который оказывается равным $c^m = \frac{3}{2}(D+1)$, то есть каждый бозон вносит вклад 1 и каждый фермион вносит вклад 1/2.

У тензора энергии-импульса имеется суперпартнёр конформной размерности 3/2:

$$G^m(z) = i : \psi^\mu \partial X_\mu(z) : . \tag{1.2.17}$$

Фурье-моды T^m и G^m вместе образуют суперрасширение алгебры Вирасоро, N=1 суперконформную алгебру.

Поля духов b, c и их суперпартнёры β, γ также являются суперконформной теорией поля с центральным зарядом $-26 + 11 = -15$:

$$\begin{aligned} b(z)c(0) &= \frac{1}{z} + reg., \\ \beta(z)\gamma(0) &= -\frac{1}{z} + reg., \end{aligned} \tag{1.2.18}$$

где поля b, c являются нечётными, то есть фермионными, а их суперпартнёры, поля β, γ, наоборот, чётными. Каждую из этих систем можно понимать как деформированную систему одного комплексного фермиона. Соответствующие тензор энергии импульса и его суперпартнёр даются формулами:

$$\begin{aligned} T^{gh} &= -\partial bc - 2b\partial c - \frac{1}{2}\partial\beta\gamma - \frac{3}{2}\beta\partial\gamma, \\ G^{gh} &= \partial\beta c + \frac{3}{2}\beta\partial c = 2b\gamma. \end{aligned} \tag{1.2.19}$$

Таким образом, для сокращения конформной аномалии, полный центральный заряд материи должен равняться 15, то есть размерность пространства времени оказывается равной $D + 1 = 10$.

Как и в любой теории с калибровочной симметрии и духами Фаддеева-Попова, в теории суперструн пространство состояний оказывается БРСТ-когомологиями суммарного пространства материи и духов. БРСТ оператор также строится по стандартной процедуре:

$$Q_{BRST} = \oint \mathrm{d}u \left[cT^m + \beta G^m + \frac{1}{2}(cT^{gh} + \beta G^{gh}) \right]. \tag{1.2.20}$$

Можно проверить, что $Q_{BRST}^2 = 0$ только в том случае, когда полный центральный заряд теории равен нулю, что подтверждает самосогласованность конформной теории с гравитацией в случае сокращения конформной аномалии. Тогда физические состояния характеризуются тем, что принадлежат когомологиям оператора Q_{BRST}:

$$\begin{aligned} &Q_{BRST}\Phi = 0, \\ &\Phi \sim \Phi + Q_{BRST}\chi. \end{aligned} \tag{1.2.21}$$

Появление групп когомологий не случайно, и с точки зрения таргет-пространства физические состояния будут соответствовать когомологиям де-Рама и Дольбо таргет-многообразия.

Для определения Гильбертова пространства состояний и БРСТ оператора также важно правильно учитывать граничные условия и взаимолокальность - хорошо определённость и однозначность операторных произведений.

В частности, поля β, γ, ψ_μ имеют полуцелые конформные размерности, что отражает то, что они являются спинорами на мировом листе, то есть их граничные условия могут быть как периодическими на цилиндре (R-сектор), так и антипериодическими (NS-сектор). Чтобы оператор Q_{BRST} был хорошо определён, в силу формулы (1.2.20), все фермионы должны лежать в одном секторе.

Общее состояние гильбертова пространства теории струн на мировом листе получается действием Фурье-мод операторов материи и духов $\psi_\mu, \partial X_\mu, b, c, \beta, \gamma$ на произведение вакуумов для каждого из полей.

Ещё одна тонкость теории струн связана с тем, что у $\beta - \gamma$ системы имеется множество вакуумов, которые нумеруются целым (NS-сектор) или полуцелым (R-сектор) числом q, называемым номером картины [39]. В частности, обозначая V_q - вертексный оператор, соответствующий вакуумному состоянию $\beta - \gamma$ системы с номером картины q имеет место равенство:

$$\begin{aligned} \beta(z)V_q(0) &= O(z^q), \\ \gamma(z)V_q(0) &= O(z^{-q}). \end{aligned} \tag{1.2.22}$$

Известно, что БРСТ-когомологии изоморфны для всех отличающихся на целое число различных номеров картин. Стоит заметить, однако, что до взятия когомологий эти модули не изоморфны.

У $b - c$ системы существует только один интересующий нас вакуум. Вакуумы полей ∂X_μ соответствуют экспоненциальным вертексным операторам $e^{ik^\mu X_\mu(z)}$, где k^μ - это импульс данного состояния.

В NS-секторе у фермионов ψ_μ также имеется только один нетривиальный вакуум. Таким образом, в секторе Невьё-Шварца общий вертексный оператор имеет вид

$$V_{k,q,P}(z) =: P(\psi_\mu, \partial X_\mu, b, c, \beta, \gamma) V_q e^{ik^\mu X_\mu}(z) :, \tag{1.2.23}$$

где P - полином от своих аргументов, а номер картины целый $q \in \mathbb{Z}$.

В свою очередь, в R-секторе вакуумы $\beta - \gamma$ системы нумеруются полуцелым номером картины, а вакуумы фермионов ψ_μ задаются вертексными операторами $S_\alpha, \tilde{S}_\alpha$ $1 \le \alpha \le 16$, которые имеют конформную размерность $c/24$, то есть минимальную в R-секторе, преобразуются как 10-мерные Вейлевские спиноры и характеризуются следующими ОР:

$$\begin{aligned} \psi_\mu(z)S_\alpha(0) &= \frac{\Gamma^\beta_{\mu,\alpha}}{\sqrt{2z}}\tilde{S}_\beta(0) + reg., \\ S_\alpha(z)S_\beta(0) &= \frac{\Gamma^\mu_{\alpha\beta}}{z^{3/4}}\psi_\mu(0) + reg., \\ S_\alpha(z)\tilde{S}_\beta(0) &= \frac{\Gamma^{\mu\nu}_{\alpha\beta}}{z^{1/4}} : \psi_\mu\psi_\nu(0) : + reg. \end{aligned} \tag{1.2.24}$$

где $\Gamma^\beta_{\mu,\alpha}$ и $\Gamma_{\mu\nu} = [\Gamma_\mu, \Gamma_\nu]$ - десятимерные гамма-матрицы в пространстве Минковского. Общий вертексный оператор в R-секторе имеет вид

$$V_{k,\alpha,q,P}(z) =: P^\alpha(\psi_\mu, \partial X_\mu, b, c, \beta, \gamma) S_\alpha V_q e^{ik^\mu X_\mu}(z) : . \tag{1.2.25}$$

N=2 суперсимметрия на мировом листе Получившаяся теория на мировом листе оказывается обладает скрытой N=2 суперсимметрией. Чтобы явно её увидеть, можно снабдить таргет пространство $\mathbb{R}^{1,9}$ комплексной (более точно *Кэлеровой* структурой) например составить из полей материи комплексные координаты:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}X^\pm_0(z) &= \mp X_0 + X_1, \\ \sqrt{2}X^\pm_a(z) &= X_{2a} \pm iX_{2a+1}, \\ \sqrt{2}\psi^0_\pm(z) &= \mp\psi_0 + \psi_1, \\ \sqrt{2}\psi^a_\pm(z) &= \psi_{2a} \pm i\psi_{2a+1}, \end{aligned} \tag{1.2.26}$$

X^+ и X^- интерпретируются как голоморфные и антиголоморфные координаты на $\mathbb{C}^5$. Нерегулярные операторные произведения полей при этом имеют вид:

$$\begin{aligned} \partial X_a^+(z)\partial X_b^-(0) &= -\frac{\delta_{ab}}{z^2}, \\ \psi_+^a(z)\psi_-^b(0) &= \frac{\delta^{ab}}{z}, \end{aligned} \tag{1.2.27}$$

то есть метрика на таргет пространстве $\mathbb{C}^5$ в нашем базисе имеет стандартный вид $g_{a\bar{b}} = \delta_{ab}$. В таком базисе суперток G_m разбивается на голоморфную и антиголоморфную компоненты:

$$\begin{aligned} G^m(z) &= i\psi^\mu \partial X_\mu = i\sum_{a\le 5}\psi_+^a\partial X_a^- + i\sum_{a\le 5}\psi_-^a\partial X_a^+, \\ G_+^m(z) &= i\sqrt{2}\sum_{a\le 5}\psi_+^a\partial X_a^-, \\ G_-^m(z) &= i\sqrt{2}\sum_{a\le 5}\psi_-^a\partial X_a^+. \end{aligned} \tag{1.2.28}$$

Можно провести стандартное для суперсимметричных сигма моделей отождествление фермионных полей с дифференциальными формами на таргет пространстве ($\mathbb{C}^5$ в нашем случае) по принципу

$$\psi_+^a \to \mathrm{d}X_+^a, \quad \psi_-^a \to \iota_{\partial_{X_+^a}}. \tag{1.2.29}$$

Легко видеть, что компоненты $G^m_{\pm,-1/2}$ действуют на дифференциальные формы как дифференциалы Дольбо ∂ и ∂^*:

$$\begin{aligned} -\frac{i}{\sqrt{2}}\oint \mathrm{d}u\,(u-z)G_+^m(u)\ &: f(X_1^+,\cdots,X_5^+)\,\psi_{i_1}^+\cdots\psi_{i_k}^+(z) := \\ &= \sum_{j=1}^{5} : \frac{\partial}{\partial X_j^+} f(X_1^+,\cdots,X_5^+)\,\psi_j^+\psi_{i_1}^+\cdots\psi_{i_k}^+(z) : . \end{aligned} \tag{1.2.30}$$

Эта интерпретация согласуется со стандартной в $N = 2$ суперсимметричных сигма-моделях, а также будет важна для нас в дальнейшем, когда мы перейдём к рассмотрению многообразий Калаби-Яу.

В теории также появляется сохраняющийся бозонный $U(1)$-ток $J(z)$, который возникает в ОР:

$$G^+(z)G^-(0) = \frac{2c}{3z^3} + \frac{2}{z^2}J(0) + \frac{2}{z}T(0) + \frac{1}{z}\partial J(0) + reg.. \tag{1.2.31}$$

Явно имеем

$$J(z) = \sum_{a\le 5} : \psi_+\psi_-(z) : . \tag{1.2.32}$$

С точки зрения дифференциальных форм на таргет многообразии, собственные значения J_0 при действию на форму равняется степени формы, то есть количеству голоморфных дифференциалов на ней.

Вместе моды разложения токов $T(z), G^{\pm}(z)$ и $J(z)$ образуют $N = 2$ конформную супералгебру с центральным зарядом 15. Соотношения алгебры, в частности, накладывают ограничения для любого поля из NS сектора с $L_0\Phi = \Delta\,\Phi$ и $J_0\phi = q\,\Phi$:

$$2\Delta \geq |q| \tag{1.2.33}$$

в унитарной теории. Поля, для которых выполняется $2\Delta = q$ и $2\Delta = -q$ называются киральными и антикиральными соответственно, для них выполняется $G^{+}_{-1/2}\Phi = 0$ и $G^{-}_{-1/2} = 0$ соответственно. С геометрической точки зрения эти равенства влекут условия гармоничности дифференциальных форм. Более того, как и все примарные поля они уничтожаются всеми положительными модами токов $T, G^{\pm}, J$.

Можно также показать, что $b - c - \beta - \gamma$ система также обладает $N = 2$ суперконформной симметрией, однако это уведёт нас в сторону от основной цели данной работы.

GSO-проекция У $N = 2$-алгебры есть автоморфизм, так называемый *спектральный поток*, который переводит друг в друга секторы Невьё-Шварца и Рамона. Поскольку вертексы в NS и R секторах преобразуются под действием 10-мерной группы Лоренца как тензоры и спиноры соответственно, то спектральный поток естественно использовать для построения оператора пространственно-временной суперсимметрии. Одна из явных реализаций оператора суперсимметрии в этом случае (которая зависит от номеров картины, выбора киральности Вейлевского спинора и выбора комплексного базиса а пространстве Минковского) имеет вид:

$$Q_\alpha = \oint \mathrm{d}u S_\alpha V_{-3/2}(u), \tag{1.2.34}$$

где S_α - это вертексный оператор соответствующий Рамоновскому вакууму, а $V_{-3/2}$ - оператор реализующий вакуум $\beta-\gamma$ системы в номере картины $-3/2$. Стоит заметить, что Q_α тесно связан с вертексным оператором в Рамоновском секторе $cS_\alpha V_{-3/2}(z)$.

В текущем варианте теории есть ряд недостатков, а именно нарушаются некоторые основные свойства теории гравитации:

1. Взаимолокальность
2. Модулярная инвариантность,

а также среди состояний присутствуют тахионы $:e^{ik^\mu X_\mu}V_{-1}(z):,\ k^2 = -1/2.$

Взаимолокальность означает, что в операторных произведениях вертексных операторов теории нет разрезов, в противном случае их нельзя проинтегрировать по мировому листу. В качестве примера нарушения взаимолокальности можно привести ОР фермионных вертексных операторов:

$$c\, S_\alpha V_{-3/2}(z) \cdot u^\beta S_\beta V_{-1/2}(z) e^{ikX}(0) = c\, \frac{\Gamma^\mu_{\alpha\beta}}{z^{3/2}}\, \psi^\mu\, V_{-2}\, e^{ikX}(0) + reg.. \qquad (1.2.35)$$

Поскольку первый вертексный оператор соответствует супертоку, это также означает невозможность подействовать суперзарядом на второй вертекс. Модулярная инвариантность означает хорошо определённость теории на торе.

Все эти проблемы решаются с помощью GSO проекции [46] (Лиоцци-Шерк-Олив), а именно самосогласованной проекции пространства состояний и вертексных операторов на подпространство, на котором все обозначенные выше условия выполняются.

Для теории суперструн оказывается достаточно потребовать взаимолокальности с суперзарядом Q_α, при этом все остальные условия будут выполнены. Условие взаимолокальности с Q_α в свою очередь оказывается эквивалентно чётному фермионному числу, где фемионное число пропорционально собственному значению заряда тока $J(z) = J^m(z) + J^{gh}(z)$.

Легко видеть, что это условие отбирает киральные (антикиральные) поля как в материальном так и в духовом секторе, то есть поля для которых $2\Delta = |q|$. Как упоминалось выше, конформная размерность БРСТ-когомологий целочислена, то есть $q \in \mathbb{Z}/2$.

После GSO проекции тахионное состояние $: e^{ik^\mu X_\mu} V_{-1}(z) :$ в $NS-$секторе не выживает, имея фермионное число 1, приходящее из духового сектора.

Самыми важными для нас являются безмассовые состояния, а именно:

1) В NS-секторе:

$$V^{NS}_{\xi,k} = c\, \xi_\mu\, \psi^\mu\, e^{ikX}, \qquad (1.2.36)$$

такое, что $k^2 = 0,\ k\cdot\xi = 0$ в силу БРСТ-замкнутости. Этот вертексный оператор является “фотоном” с десятимерной точки зрения, а именно безмассовая частица, преобразующаяся в векторном представлении малой группы Лоренца $so(8)$.

2) В R-секторе

$$V^R_{u,k} = c\, u^\alpha\, \tilde{S}_\alpha\, e^{ikX}, \qquad (1.2.37)$$

также безмассовое $k^2 = 0$ и подчиняющееся уравнению Дирака $k_\mu \Gamma^\mu_{\alpha\beta} u^\alpha = 0$ также в силу БРСТ условия. Заметим, что из-за GSO-проекции выжила только одна киральность фермионов. Таким образом, получился безмассовый Вейлевский фермион, который преобразуется в спинорном представлении малой группы Лоренца $so(8)$. Заметим, что у $so(8)$ имеются два спинорных представления, которые соответствуют двум изначальным киральностям Вейлевских фермионов в $\mathbb{R}^{1,9}$. Выбор конкретной киральности определяется выбором киральности для оператора суперсимметрии Q_α.

В каждом из секторов имеется по 8 динамических состояний, и, как можно проверить, одни переводятся в другие оператором суперсимметрии (в основе которого лежит автоморфизм $N = 2$ алгебры. Этот изоморфизм можно легко увидеть на уровне диаграммы Дынкина для алгебры $so(8)$. Диаграмма обладает S_3 симметрией, переставляющей три внешних вершины. Две из этих вершин порождают спинорные представления, а третья векторное, в силу чего все эти представления друг другу изоморфны.

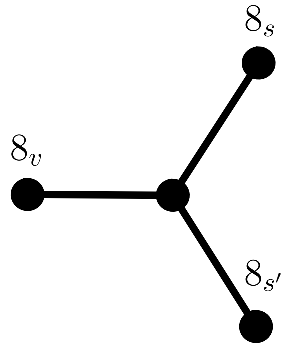


Рис. 1.2: Диаграмма Дынкина алгебры $so(8)$

Спаривание с антиголоморфным сектором До этого рассуждение велось только в голоморфном секторе теории на мировом листе. Однако, чтобы получить полную теорию, надо рассмотреть по отдельности голоморфный и антиголоморфный сектор, провести в них по отдельности ГСО проекцию, после чего взять произведение и наложить условие равенства уровней в голоморфном и антиголоморфном секторе, которое следует из того, что у бозона $X(z, \bar{z})$ имеется только одна нулевая мода, а не две независимых.

Тут имеются две существенно разные возможности, которые зависят от выбора ГСО проекции в голоморфном и антиголоморфном секторах и приводят к двум различным теориям суперструн:

1. Взять в голоморфном секторе суперзаряд одной киральности, а в антиголоморфном другой, такая теория носит название теории суперструн типа IIA, она обладает N=(1,1) пространственно-временной суперсимметрией.

2. В обоих секторах выбрать одну и ту же киральность для суперзаряда, такая теория получается киральной и носит название теории суперструн типа IIB, и она обладает N=(2,0) или (0,2) пространственно-временной суперсимметрией.

Обе теории оказываются самосогласованными, и каждая имеет свои особенности, преимущества и недостатки. Так, например, теория типа IIB обладает $SL(2, \mathbb{Z})$ симметрией (S-дуальностью), модулярной инвариантностью, а теория типа IIA, по крайней мере в пределе супергравитации, оказывается пределом одиннадцатимерной теории супергравитации. Более того, обе теории связаны так называемой зеркальной симметрией или T-дуальностью. Часть этих вопросов, особенно зеркальная симметрия, будут обсуждаться ниже.

Рассмотрим набор безмассовых состояний а каждой из этих теорий. Для этого нужно перемножать безмассовые поля из NS и R секторов для голоморфной и антиголоморфной частей. Удобнее всего это оказывается делать в терминах теории представлений алгебры $so(8)$. В частности, это сразу же даёт пространственно-временную интерпретацию для вертексов полной теории.

Обозначим за 8_v векторное представление $so(8)$, а за $8_s, 8_{s'}$ спинорные. Пусть $a, b \in \{v, s, s'\}$. Имеем следующие равенства для тензорных произведений представлений:

$$\begin{aligned} &8_a \times 8_a = 1 + 28 + 35, \\ &8_a \times 8_b = 8 + 56, \quad a \neq b \end{aligned} \tag{1.2.38}$$

где числа в правой части в правой части равенств означают размерности получившихся представлений. В частности, рассмотрим произведение $8_v \times 8_v$. Соответствующий вертекс имеет вид:

$$u_{NM}\, \psi^N\, \bar{\psi}^M\, V_{-1}\bar{V}_{-1}\, e^{ikX}, \tag{1.2.39}$$

где общая матрица $u_{MN} = G_{MN} + B_{MN} + \Phi\, \delta_{MN}$ раскладывается на симметрическую бесследовую часть, антисимметрическую и след. Соответствующие представления имеют размерности $35, 28$ и 1. Вертексные операторы называются гравитоном, B-полем (полем Кальба-Рамона) и дилатоном.

Теперь рассмотрим произведение двух одинаковых R-секторов (теория типа IIB). Вертексные операторы выражаются в виде:

$$u^{\alpha\beta}\, S^\alpha\, \bar{S}^\beta\, V_{-1/2}\bar{V}_{-1/2}\, e^{ikX}. \tag{1.2.40}$$

Произведение спиноров раскладывается по неприводимым представлениям с помощью гамма-матриц:

$$u_{\alpha\beta} = C_0\delta_{\alpha\beta} + C_{MN}(\Gamma^{MN})_{\alpha\beta} + C^+_{MNKL}(\Gamma^{MNKL})_{\alpha\beta}, \tag{1.2.41}$$

где в разложении участвуют только чётное число гамма матриц ($\Gamma^{M_1\cdots M_k} = k!^{-1}\epsilon_{M_1,\cdots M_K}\Gamma^{M_1\cdots M_k}$) в силу одинаковой киральности спиноров в произведении, а тензор C^+_{MNKL} является самодуальной формой. Соответствующие размерности тензорных представлений: $1, 28$ и 35, а вертексные поля соответствуют Рамон-Рамоновским формам на таргет-пространстве.

Теперь разберём вертексы в $NS-R$ секторе, то есть произведение $8_v \times 8_s$:

$$u^\alpha_M\, S^\alpha\, \bar{\psi}^M\, V_{-1/2}\bar{V}_{-1}\, e^{ikX}. \tag{1.2.42}$$

Данный вертекс разбивается на поле Рариты-Швингера одной киральности и фермион другой киральности: $u^{\alpha}_{M} = s^{\alpha}_{M} + \Gamma^{\alpha\beta}_{M}\tilde{\lambda}_{\beta}$. Размерности представлений 56 и 8.

Последний случай, $R - R$ поля в теории типа IIA, произведение $8_s \times 8_{s'}$ разбирается аналогично IIB:

$$u^{\beta}_{\alpha}\, S^{\alpha}\, \bar{\tilde{S}}_{\beta}\, V_{-1/2}\bar{V}_{-1/2}\, e^{ikX}, \tag{1.2.43}$$

где аналонично IIB

$$u^{\beta}_{\alpha} = C_M \Gamma^{M,\beta}_{\alpha} + C_{MNK}(\Gamma^{MNK})^{\beta}_{\alpha}, \tag{1.2.44}$$

только теперь в разложении участвуют только нечётное число гамма матриц Соответствующие размерности тензорных представлений: 8 и 56.

Бозонный сектор полной теории представлен (NS, NS) и (R, R) секторами и состоит из метрики, B-поля, дилатона и R-R форм, в то время как фермионный сектор представлен (NS, R) и (R, NS) секторами. Имеется по 128 состояний в каждом из секторов.

Более точно, список вертексных операторов в теории IIA:

$$(G_{MN}, B_{MN}, \Phi, C_0, C_{MN}, C^{+}_{MNKL}) + (\Psi_{M,\alpha}, \tilde{\Psi}^{\alpha}_{M}, \lambda^{\alpha}, \tilde{\lambda}_{\alpha}). \tag{1.2.45}$$

Вертексные операторы в теории типа IIB

$$(G_{MN}, B_{MN}, \Phi, C_M, C_{MNK}) + (\Psi_{M,\alpha}, \tilde{\Psi}_{M,\alpha}, \lambda^{\alpha}, \tilde{\lambda}^{\alpha}). \tag{1.2.46}$$

Десятимерная супергравитация Изначально, значительный успех теории струн заключался в наличии гравитона среди состояний теории. Более того, наборы полей, которые мы получили в предыдущем параграфе совпадают с наборами полей N=2 теорий десятимерной супергравитации, которые тоже делятся на типы IIA или N=(1,1) и IIB, или N=(2,0). Поэтому имеет смысл надеяться, что теория струн представляет собой ультрафиолетовое пополнение неперенормируемой теории супергравитации. И действительно, после небольшого переопределения полей, рассматривая корреляционные функции вертексных операторов теории струн в древесном приближении, то есть вычисленные на двумерной сфере, и сравнивая их с корреляционными функциями полей супергравитаций типа IIA и IIB.

Таким образом, до определённой степени теорию струн можно изучать изучая соответствующую теорию супергравитации, котороя относительно хорошо изучена на качественном уровне, а также имеет Лагранжево описание (с некоторой тонкостью в случае IIB), что опять же, значительно облегчает работу.

Чтобы выписать бозонные части соответствующих действий удобно ввести ковариантные обозначения для Рамон-Рамоновских форм и B-поля:

$$\begin{aligned}
&C_1 = C_M \mathrm{d}X^M,\ C_2 = C_{MK}\mathrm{d}X^M\,\mathrm{d}X^K,\ C_3 = C_{MKN}\mathrm{d}X^M\,\mathrm{d}X^K\,\mathrm{d}X^N,\\
&C_4^+ = C^+_{MKNL}\mathrm{d}X^M\,\mathrm{d}X^K\,\mathrm{d}X^N\,\mathrm{d}X^L,\\
&B_2 = B_{MN}\mathrm{d}X^M\,\mathrm{d}X^N.
\end{aligned} \tag{1.2.47}$$

N=(1,1) супергравитация, супергравитация типа IIA бозонная часть действия для IIA супергравитации в 10 измерениях имеет вид

$$\begin{aligned}
S_{eff,IIA} = \frac{1}{2\tilde{\kappa}_{10}^2}\int \mathrm{d}^{10}w\sqrt{-G}\Big[e^{-2\Phi}\left(R + 4(\nabla\Phi)^2 - \frac{1}{2}|H_3|^2\right) -\\
-\frac{1}{2}|F_2|^2 - \frac{1}{2}|F_4|^2\Big] - \frac{1}{4\tilde{\kappa}_{10}^2}\int B_2\wedge \mathrm{d}C_3\wedge \mathrm{d}C_3,
\end{aligned} \tag{1.2.48}$$

где введены дополнительные обозначения:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\kappa}_{10}^2 = \frac{1}{4\pi}(4\pi^2\alpha')^4,\\
&F_2 = \mathrm{d}C_1,\ F_4 = \mathrm{d}C_3 - \mathrm{d}B_2\wedge C_1.
\end{aligned} \tag{1.2.49}$$

Действие имеет довольно простую структуру, оно состоит из кинетических членов всех полей после небольшого переобозначения и члена Черна-Саймонса.

Характерной особенностью данной теории является то, что её действие можно получить из 11-мерной теории супергравитации. В одиннадцатимерной супергравитации бозонный сектор состоит из гравитона G_{MN}, а также 3-формы A_{MNK}. Фермионный сектор состоит из гравитино $\Psi_{M,\alpha}$, который являются Дираковским спинором, поскольку в нечётном числе измерений нет Вейлевских спиноров. Бозонная часть действия теории записывается в виде:

$$S_{eff,11} = \frac{1}{2\kappa}\int \mathrm{d}^{11}w\sqrt{-G}\left(R - \frac{1}{2}|F_4|^2\right) - \frac{1}{6}\int A_3\wedge F_4\wedge F_4, \tag{1.2.50}$$

где R - как обычно скалярная кривизна, а $F_4 = \mathrm{d}A_3$, и κ_{11} - гравитационная константа связи. При редукции одного из измерений гравитино Ψ_M порождает 10-мерные гравитино $\Psi_{M,\alpha},\ \tilde{\Psi}^{\alpha}_M$, когда индекс $M \leq 10$ пробегает 10 некомпактных измерений и фермионы $\lambda^\alpha,\ \tilde{\lambda}_\alpha$ разных киральностей, когда $M = 11$.

В бозонном секторе метрика G_{MN} порождает десятимерную метрику, $G_{M,11}$ - один форму C_M, и $G_{11,11}$ становится дилатоном. В свою очередь из 3-формы A_{MNK} получаются Рамон-Рамоновская 3-форма C_{MNK} и B-поле $B_{MN} = A_{MN,11}$.

N=(2,0) супергравитация, супергравитация типа IIB Выпишем действие для супергравитации типа IIB:

$$S_{eff,IIB} = \frac{1}{2\tilde{\kappa}_{10}^2}\int \mathrm{d}^{10}w\sqrt{-G}\Big[e^{-2\Phi}\left(R+4(\nabla\Phi)^2-\frac{1}{2}|H_3|^2\right)- \\ -\frac{1}{2}|F_1|^2-\frac{1}{2}|F_3|^2-\frac{1}{2}|F_5|^2\Big]-\frac{1}{4\tilde{\kappa}_{10}^2}\int C_4\wedge H_3\wedge F_3, \tag{1.2.51}$$

где

$$H_3 = \mathrm{d}B_2, \\ F_1=\mathrm{d}C_0,\ F_3=\mathrm{d}C_2-C_0\mathrm{d}B_2,\ F_5=\mathrm{d}C_4-\frac{1}{2}\left(C_2\wedge B_2+B_2\wedge \mathrm{d}C_2\right) \tag{1.2.52}$$

Эта теория непосредственно не получается размерной редукцией из 11 измерений (как минимум, размерная редукция не позволила бы получить киральный суперзаряд), но зато обладает замечательной симметрией, так называемой S-дуальностью.

В теории есть две 2-формы и две ноль формы, возникающие из (NS, NS) и (R, R) секторов теории суперструн. S-дуальность перемешивает (NS, NS) и (R, R) сектора между собой. Оказывается удобно ввести комплексный параметр

$$\tau = C_0 + ie^{-\Phi}. \tag{1.2.53}$$

Тогда S-дуальность действует на поле τ модулярными преобразованиями

$$\tau \to \frac{a\tau+b}{c\tau+d},\ ad-bc=1. \tag{1.2.54}$$

Такие преобразования порождаются двумя генераторами:

$$T=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\ S=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}, \tag{1.2.55}$$

$T(\tau)=\tau+1,\ S(\tau)=-1/\tau$. При этом нетривиальным является именно S-преобразование, что отражается в названии S-дуальности.

В результате описанных выше рассуждений можно получить некоторое представление о теории (замкнутых) струн в плоском пространстве. Плоское пространство является одним из суперсимметричных бэкграундов теории суперструн, который уже содержит в себе теорию супергравитации в плоском десятимерном пространстве, но с одной стороны слишком простой и содержит в себе мало структуры, а с другой стороны не очень интересен с феноменологической точки зрения. Оба этих недостатка решаются с помощью компактификации, а именно рассмотрения нетривиальных криволинейных бэкграундов (вакуумов) теории струн. Есть и другие пути разнообразить теорию как введение бран (и открытых струн), а также рассмотрение других типов теории струн (гетеротические и типа I) и дуальностей. В следующей главе мы вкратце опишем некоторые интересные суперсимметричные вакуумы теории и их струнную и геометрическую интерпретацию, которые, после определённой математической подготовки, позволят вплотную подойти к основной теме работы.

1.3 Проблема компактификации

В прошлом разделе было описано построение теории струн в плоском пространстве Минковского. Плоское пространство интерпретируется как один из бэкграундов или вакуумов полной теории струн. Идея компактификации восходит к редукции Калуцы-Клейна, а именно к помещение теории на пространство-время, которое являтся прямым произведением плоского на компактное.

Имея ввиду приложения к четырёхмерной физике частиц, естественное таргет пространство для струны - $\mathbb{R}^{1,3} \times X$, где X - некоторое компактное шестимерное вещественное многообразие, размер которого мал по сравнению с типичными энергиями экспериментов современной четырёхмерной физики.

Есть два основных способа провести компактификацию в теории струн. Первый, геометрический, состоит в рассмотрении полного действия Полякова

$$S_{Pol} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int \mathrm{d}^2 z \left(\sqrt{h} h^{z\bar{z}} \partial X^\mu \overline{\partial} X^\nu g_{\mu\nu}(X) + \mathrm{d}X^\mu \wedge \bar{\mathrm{d}} X^\nu b_{\mu\nu}(X) + fermi. \right), \tag{1.3.1}$$

где $g_{\mu\nu}(X)$ и $b_{\mu\nu}(X)$ являются вакуумными средними метрики, тахиона и B-поля соответственно. Чтобы они являлись классическими вакуумами теории, они должны удовлетворять классическим уравнениям движения. При этом от бэкграунда требуется, чтобы теория оставалась $N = (2, 2)$ суперсимметричной, что означает, что классическая метрика $g_{\mu\nu}(X)$ пространства-времени является Кэлеровой. Можно также рассмотреть предел низких энергий, в котором теория суперструн описывается супергравитацией и рассмотреть соответствующую теорию супергравитации в нетривиальном бэкграунде. При этом после редукции шести компактных измерений согласно теории Калуцы-Клейна получится четырёхмерная теория гравитации с бесконечной башней частиц, соответствующей модам колебаний в компактном пространстве. При достаточно малом размере последнего массы частиц будут достаточно большими, чтобы массивные частицы были ненаблюдаемыми при текущих доступных значениях энергии в четырёхмерной физике.

Второй подход более алгебраичен и заключается в следовании формализму конформной теории поля и построению $N = (2, 2)$ двумерных суперконформных теорий поля с центральным зарядом $c = 15$. При этом для того, чтобы у теории была четырёхмерная интерпретация, подразумевается, что такая теория должна получаться ГСО-проекцией из произведения теории 4 свободных бозонов и фермионов с $c = 6$ и некоторой "компактной" теории с $c = 9$.

Ещё Гепнер [42] предположил, что два подхода должны быть эквивалентны. В некоторых случаях эту эквивалентность можно показать на уровне корреляционных функций, например если взять с одной стороны сигма-модели в так называемые гиперповерхности Ферма, то им будут соответствовать определённые произведения N=2 минимальных моделей. В более общем случае определённым нелинейным сигма-моделям будут соответствовать инфракрасные неподвижные точки ренормгруппового потока суперсимметричных N=2 теорий Ландау-Гинзбурга.

В обоих подходах должна получиться четырёхмерная $N = 2$ теория супергравитации с материей, которая зависит от конкретных параметров модели.

В основном мы будем придерживаться геометрического подхода, хотя его сравнение с алгебраическим, то есть с подходом Ландау-Гинзбурга, позволяет получить много информации, в частности явно вычислить некоторые константы связи получившейся четырёхмерной теории.

Редукция Калуцы-Клейна Чтобы описать компактификацию в теории суперструн для начала рассмотрим в качестве примера компактификацию теории одного свободного бозона $\phi(w)$ в пяти измерениях на окружность. Действие такой теории имеет вид

$$S[\phi] = \int_{\mathbb{R}^{1,3}\times S^1} \mathrm{d}^5 w\, \partial_M\phi\partial^M\phi = -\int_{\mathbb{R}^{1,3}\times S^1} \mathrm{d}^5 w\, \phi\Delta\phi. \qquad (1.3.2)$$

При взятии функциональных интегралов в теории с действием (1.3.2) можно сначала взять интеграл по внутреннему пространству S^1, чтобы свести теорию к четырёхмерной. Для этого удобно разложить поле $\phi(w)$ по собственным функциям оператора Лапласа на окружности

$$\phi(w) = \phi(x,y) = \sum_n \phi^n(x)\frac{e^{iny/R}}{\sqrt{2\pi R}}, \qquad (1.3.3)$$

где x - это координата на пространстве Минковского, а y - координата на окружности. Подставляя это выражение в действие получаем

$$S[\phi] = -\sum_n \int_{\mathbb{R}^{1,3}} \mathrm{d}^4 x\, \left[\phi^n(x)\Delta\phi^n(x) + \frac{n^2}{R^2}(\phi^n(x))^2\right]. \qquad (1.3.4)$$

В итоге мы получаем четырёхмерное действие для бесконечной башни частиц $\phi^n(x)$ с массами n^2/R^2 Если радиус R достаточно мал, то все частицы кроме ϕ^0 становятся тяжёлыми, и ими в низкоэнергетическом приближении можно пренебречь.

Аналогично можно поступить с теорией супергравитации и компактификацией шести измерений. В эффективной теории действие имеет вид:

$$S_{eff} = \int \mathrm{d}^{10}w L(\Phi(w)) = \int \mathrm{d}^4 x \int \mathrm{d}^6 y \left[K(\Phi(x,y)) + V(\Phi(x,y))\right], \quad (1.3.5)$$

где w^M, x^μ, y^m - координаты на $\mathbb{R}^{1,3} \times K$, $\mathbb{R}^{1,3}$ и K соответственно, , $\Phi(w)$ - совокупность десятимерных полей теории, и $K(\Phi)$ - кинетические члены в действии.

Аналогично теории Калуцы-Клейна можно разложить поля $\Phi(x,y)$ по собственным функциям оператора кинетического члена компактной части пространства K.

$$\Phi(x,y) = \sum_i \phi^i(x) \otimes f^i(y),\ \Delta_K f^i(y) = \lambda^i f^i(y), \quad (1.3.6)$$

а затем проинтегрировать по координатам y на K. При этом получится четырёхмерная теория определённая Лагранжианом с частицами $\phi^i(x)$ и массами λ^i/V, где V - объём многообразия K, в частности, при маленьком размере пространства K массивные частицы можно игнорировать, останутся лишь частицы, соответствующие нулевым модам. Такая теория будет четырёхмерной теорией гравитации с некоторой материей.

Для феноменологически интересной теории мы хотим, чтобы четырёхмерная теория была суперсимметричной. Изучим условия, которые налагаются этим требованием на пространство компактификации K.

Вакуум теории $|0\rangle \in \mathscr{H}$ с ненарушенной суперсимметрией должен быть инвариантен относительно как минимум 4-х преобразований суперсимметрии

$$\delta_\epsilon |0\rangle = \epsilon^A_\alpha Q_A |0\rangle = 0, \ \ 1 \le i \le 4 \quad (1.3.7)$$

где Q_A- это оператор суперсимметрии в 10 измерениях и ϵ^A_i - спиноры в классическом бэкграунде преобразующиеся в спинорном представлении группы $so(1,3)$ по индексу α.

Из условия, что суперсимметричная вариация полей даётся коммутатором $\delta_\epsilon \Phi = [\epsilon Q, \Phi]$ и инвариантности вакуума следует, что суперсимметричные вариации всех полей вокруг классического решения равны нулю $\langle \delta_\epsilon \Phi \rangle = 0$.

$$\langle 0|\delta_\epsilon \Phi|0\rangle = \epsilon \langle 0|Q\,\Phi|0\rangle - \epsilon\langle 0|\Phi\, Q|0\rangle = 0. \quad (1.3.8)$$

В случае бозонных полей Φ это условие выполняется автоматически, поскольку их вариация является спинором и нетривиально преобразуется под действием $\mathrm{SO}(1,3)$, нарушая симметрию пространства Минковского, или же все вакуумные средние фермионов равны нулю. Среди фермионных полей в теории с суперсимметрией есть гравитино $\Psi_{M,\alpha}$ с вариацией

$$\delta_\epsilon \Psi_{M,\alpha} = \nabla_M \epsilon_\alpha + \cdots \quad (1.3.9)$$

здесь ϵ означает 10-мерный Майорано-Вейлевский спинор, связность является ковариантной производной в классическом бэкграунде, а многоточие означает члены, зависящие от других полей теории (чьи вакумные средние исчезают). Таким образом мы приходим к условию

$$\langle \nabla \epsilon \rangle = \tilde{\nabla} \epsilon = 0 \tag{1.3.10}$$

где тильда означает, что для метрики в связности используется её вакуумное среднее. Чтобы теория обладала N=2 d=4 суперсимметрией (минимальной ненулевой в случае теорий типа II, поскольку в теория до компактификации также была N=2) надо, чтобы уравнение (1.3.10) на Вейлевские спиноры имело ровно 4 решения, тогда каждый из суперзарядов десятимерной теории породит один ненарушенный суперзаряд четырёхмерной.

Тут стоит сделать уточнение. С феноменологической точки зрения d=4 N=2 супергравитация не очень интересна, поскольку в ней нет киральной материи, однако различными приёмами нарушения суперсимметрии, в частности орбифолдингом [6] (введением ориентифолдных бран) можно добиться понижения N=2 суперсимметрии до N=1, в которой имеются киральные мультиплеты материи.

Четыре сохраняющихся суперзаряда имеют вид $Q_\alpha = \epsilon_\alpha^A Q_A(w)$, где $1 \leq \alpha \leq 4$ и $\nabla \epsilon_\alpha = 0$. Оказывается, что многообразия, допускающие ковариантно постоянный спинор, являются многообразиями Калаби-Яу, и про них будет рассказано в дальнейшем.

Нулевые моды операторов кинетических членов можно отождествить с когомологиями многообразия K и с деформациями Кэлеровой и комплексной структур на нём. В полученной таким образом теории будут универсальные, то есть не зависящие от конкретного Калаби-Яу $N = 2$ мультиплеты: гравитационный и гипермультиплет

$$(2, 2 \times 3/2, 1)_\pm, \ (1/2, 2 \times 0, -1/2) + h.c., \tag{1.3.11}$$

где в скобках указаны (четырёхмерные) спины входящих в мультиплет полей, а также четырёхмерная теория будет содержать переменное количество вектормультиплетов $(1, 2 \times 1/2, 0)$ и гипермультиплетов, зависящее от когомологий $h^{1,1}$ и $h^{2,1}$ (см. ниже) компактифицирующего многообразия.

Метрика и константы взаимодействия в эффективной четырёхмерной теории таким образом определяются в низшем порядке геометрией пространства модулей K, интегралами определённых элементов когомологий. Из знания этих констант можно вычислять корреляционные функции различных четырёхмерных полей. Эти корреляционные функции можно сравнивать с аналогичными результатами теории струн, вычисляемых во втором подходе. Особый интерес будут представлять константы связи в векторных мультиплетах. Оказывается, что вследствие теорем о неперенормируемости некоторые из этих констант не получают старших поправок (струнной сигма-модели).

В частности, в дальнейшем будут вычислены константы связи векторных мультиплетов связанных с деформациями комплексных структур на многообразиях Калаби-Яу, заданных однородными уравнениями во взвешенных проективных пространствах $W\mathbb{P}^4$.

Компактификация с точки зрения конформной теории. В алгебраическом подходе материальный сектор будем составлять из двух частей:

4 свободных фермионов и бозонов X^μ, ψ^μ, где индекс μ принимает значения $0, 1, 2, 3$. Вторая часть является произвольной конформной теорией поля с центральным зарядом $c = 9$. Вертексы полной теории получаются из произведения вертексых операторов частей. Например, вертекс четырёхмерного гравитона имеет вид

$$V_G(k) = G_{\mu\nu}\bar{\psi}^\mu(\bar{z})\psi^\nu(z)e^{ikX}e^{-(\phi+\bar{\phi})} \cdot \Phi_0, \tag{1.3.12}$$

где Φ_0 - единичный оператор внутренней теории. Вертексы также должны принадлежать BRST когомологиям, чтобы быть физическими полями.

Оказывается, что для того, чтобы можно было построить операторы четырёхмерной суперсимметрии на вертексах, необходимо, чтобы внутренняя теория с $c = 9$ была $N = (2, 2)$ суперсимметричной конформной теорией поля.

В таком случае можно построить аналогично универсальные четырёхмерные $N = 2$ мультиплеты из вертексных операторов. Как и в предыдущем подходе ими оказываются гравитационный и гипермультиплет.

Остальные гипер- и вектормультиплеты строятся из так называемых киральных и антикиральных полей конформной теории поля. Для них, например, выполняется формула $\Delta = \pm 1/2q$, где Δ - конформная размерность, а q - $U(1)$ заряд генератора $N = (2, 2)$ алгебры.

Корреляторы так построенных вертексов можно вычислять зная корреляторы внутренней теории и сравнивать с выражениями для корреляторов четырёхмерных полей в эффективной теории.

Например оказывается, что для модели, в которой внутренняя теория произведение пяти $N = 2$ минимальных моделей 3^5 (каждая имеет индекс $k = 3$ и центральный заряд $9/5$) получается теория похожая на эффективную теорию при компактификации на квинтику, то есть гиперповерхность задаваемую уравнением пятой степени в $\mathbb{P}^4$. Более того, такое произведение минимальных моделей имеет описание через модели Ландау-Гинзбурга с суперпотенциалом $V(\Phi_i) = \Phi_1^5 + \Phi_2^5 + \Phi_3^5 + \Phi_4^5 + \Phi_5^5$. В частности количество мультиплетов и юкавские константы вектормультиплетов в обоих теориях совпадают.

Ковариантно постоянный спинор Как говорилось выше, чтобы четырёхмерная теория после компактификации обладала d=4 N=2 суперсимметрией, необходимо наличие четырёх ковариантно постоянных Вейлевских спиноров на $\mathbb{R}^{1,3} \times K$. В метрике бэкграунда ковариантно постоянные спиноры являются решениями уравнения:

$$\nabla_M \epsilon_A = \partial_M \epsilon_A + \omega^B_{M,A} \epsilon_B = 0 \tag{1.3.13}$$

для спиновой связности $\omega^B_{M,A}$ построенной по метрике Леви-Чивиты.

Поскольку пространство-время распадается в прямое произведение на плоское четырёхмерное пространство и компактное шестимерное, имеет смысл разложить десятимерные спиноры $so(1,9)$ по спинорам блочно-диагональной подгруппы $so(1,3) \oplus so(6) \subset so(1,9)$. В каждой из трёх подгрупп спиноры являются Вейлевскими. Введём обозначения для спиноров положительной и отрицательной киральности в любой размерности: $\epsilon = \epsilon^+ + \epsilon^-$. При этом $\Pi_{10} = \Pi_4 \times \Pi_6$, то есть оператор киральности в 10 измерениях является тензорным произведением операторов киральности в 4 и 6 измерениях.

В десяти измерениях, как и в двух, в Лоренцевской метрике спиноры являются Майорана-Вейлевскими, то есть сопряжение спинора не меняет его киральность $\overline{\epsilon}^{\pm} = \epsilon^{\pm}$. В свою очередь, в четырёх и шести измерениях комплексное сопряжение спинора меняет киральность $\bar{\zeta}^{\pm} = \zeta^{\mp}$, $\bar{\eta}^{\pm} = \eta^{\mp}$.

Тогда, обозначая за ϵ_A, η_α и ζ_a спиноры в 10, 4 и 6 измерениях соответственно, имеем

$$\begin{aligned} \epsilon^+ &= \eta^+ \otimes \zeta^+ + \eta^- \otimes \zeta^-, \\ \epsilon^- &= \eta^+ \otimes \zeta^- + \eta^- \otimes \zeta^+, \end{aligned} \tag{1.3.14}$$

Таким образом, чтобы иметь четыре компоненты ковариантно постоянного спинора нужно взять один из четырёх линейно независимых постоянных спиноров в плоском четырёхмерном пространстве $\eta = const$ и тензорно умножить его на один ковариантно постоянный спинор ζ на шестимерном многообразии K.

Рассуждение выше показывает, что для того, чтобы компактифицированная на K теория струн имела N=2 d=4 суперсимметричный вакуум, компактное многообразие должно допускать в точности один ковариантно постоянный спинор (который оказывается Дираковским, поскольку комплексное сопряжение спинора даст ковариантно постоянный спинор другой киральности). Если бы спиноров на K было больше, то теория обладала бы расширенной суперсимметрией.

Изучим следствия наличия ковариантно постоянного спинора на многообразии X. Для этого можно записать условие на кривизну многообразия:

$$0 = [\nabla_m, \nabla_m]\zeta = \frac{1}{4} R_{mnkl} \gamma^{kl} \zeta, \tag{1.3.15}$$

где $\gamma^{i_1,\cdots,i_l}$ - антисимметризованные произведения шестимерных гамма-матриц. В частности, γ^{kl} являются генераторами действия группы вращений $so(6)$ на спинорах.

Дальше используем свойство произведения гамма-матриц

$$\gamma^n\gamma^{kl} = \gamma^{nkl} + g^{nk}\gamma^l - g^{nl}\gamma^k \tag{1.3.16}$$

и тождество Бьянки $R_{mnkl} + R_{mkln} + R_{mlnk} = 0$ чтобы получить

$$0 = 1/2\gamma^n R_{mnkl}\gamma^{kl}\zeta = R_{ml}\gamma^l\zeta \tag{1.3.17}$$

Обозначим $R_{mn} = a_n$

$$(a_n\gamma^n)^2 = (a_n\gamma^n a_m\gamma^m)^2 = \frac{1}{2}a_n a_m\{\gamma^n,\gamma^m\} + \frac{1}{2}a_n a_m[\gamma^n,\gamma^m] = a_n a_m g^{mn}\mathrm{E} \tag{1.3.18}$$

$a_n\gamma^n$ вырождена если и только если $g_{mn}a^n a^m = 0$. В евклидовой метрике получаем $a_n = 0$. Но уравнение

$$0 = R_{mn}\gamma^n\zeta \tag{1.3.19}$$

имеет решение только если $R_{mn}\gamma^n$ вырождена, значит $R_{mn} = 0$, то есть многообразие оказывается Риччи-плоским. Оказывается, что чтобы допускать ковариантно постоянный спинор, многообразие должно быть не просто Риччи-плоским, но также ещё и комплексным Кэлеровым, такие многообразия называются многообразиями Калаби-Яу.

1.4 Многообразия Калаби-Яу

Кэлерова структура Мы только что вывели Риччи-плоскость метрики, допускающей ковариантно постоянный спинор. Изучим остальные свойства многообразия с ковариантно постоянным спинором. Для начала нормируем спинор условием $\zeta_+^\dagger\zeta_+ = \zeta_-^\dagger\zeta_+ = 1$ и построим оператор

$$J^m_{\ n} = -i\zeta_+^\dagger\gamma^m_{\ n}\zeta_+,\ \gamma^m_{\ n} = g^{ml}\gamma_{ln} \tag{1.4.1}$$

Этот оператор вещественный

$$(-i\zeta_+^\dagger\gamma^m_{\ n}\zeta_+)^\dagger = i\zeta_+^\dagger(-\gamma^m_{\ n})\zeta_+, \tag{1.4.2}$$

бесследовый из-за кососимметричности $\gamma^m_{\ m} = g_{mn}\gamma^{mn} = 0$. Для нас важно то, что квадрат этого оператора равен минус единице:

$$J^m_{\ n}J^n_{\ k} = -\delta^m_k. \tag{1.4.3}$$

Это свойство проверяется несколько сложнее. Один из способов - это подействовать на спинор $\zeta \to \Lambda_{mn}\gamma^{mn}\zeta$, чтобы привести к каноническому виду $\zeta \sim (1,0,0,0)^t$, а затем вычислить явно. Второй способ использует тождества Фирца, то есть разложение тензорного призведения спинорных представлений по тензорным:

$$\zeta\zeta^\dagger = \mathbb{1}/4 - 1/2 J_{mn}\gamma^{mn} \tag{1.4.4}$$

Коммутируя выражение выше с γ^{kl} получаем

$$[\zeta\zeta^\dagger, \gamma^{kl}] = 1/2(J_{mk}\gamma^{ml} - J_{ml}\gamma^{mk}). \tag{1.4.5}$$

Теперь надо умножить это равенство слева и справа на $\zeta^\dagger$ и ζ:

$$0 = -1/2(J_{km}J^{ml} - J_{lm}J^{mk}), \tag{1.4.6}$$

но матрица J^2 является произведением двух антисимметричных, а потому симметрична, то есть $(J^2)^l_k = 0$ для $k \neq l$. Аналогичным образом показывается, что диагональные элементы равны друг другу (и равны -1).

Такой оператор называется *почти комплексной структурой* на многообразии K. Из свойств оператора J^n_m следует, что три его собственных значения равны i, а три других равны $-i$ и поэтому в каждой точке он диагонализуем над комплексными числами.

$$J = \begin{pmatrix} i\,E & 0 \\ 0 & -i\,E \end{pmatrix} \tag{1.4.7}$$

В этих координатах назовём первые три базисных вектора $\partial_i = \partial/\partial y^i$ и оставшиеся три $\overline{\partial_j} = \overline{\partial/\partial y^i}$. Мы хотим ввести на многообразии K голоморфные координаты y^i, превратив его в комплексное многообразие. Однако это можно сделать не всегда.

Условие интегрируемости можно записать следующим образом: на комплексном многообразии определён коммутатор векторных полей $[\partial_i, \partial_j] = c^k_{ik}\partial_k$. Тогда это должно выполняться для определённых нами полей $J\partial_i = i\partial_i$. Используя то, что проектор на голоморфное и антиголоморфное подпространства пишется $v \to v \mp Jv$ имеем

$$[v - iJv, w - iJw] + iJ[v - iJv, w - iJw] = 0 <=> [v,w] - [Jv,w] - [v,Jw] + [Jv,Jw] = 0.$$

Раскрывая условие в координатах мы получаем условие интегрируемости в виде

$$N^i_{jk} = J^m_i(\nabla_m J^k_j - \nabla_j J^k_m) - J^m_j(\nabla_m J^k_i - \nabla_i J^k_m) = 0.$$

Тензор N^i_{jk} называется тензором Найнхауса, сложная теорема Ньюландера-Ниренберга утверждает, что это условие интегрируемости достаточное, то есть при выполнении условия интегрируемости на многооюразии можно ввести голоморфные координаты. Эта ситуация похожа на связь зануления тензора Римана R_{ijkl} и возможности введения плоских координат.

Поскольку J задаётся формулой (1.4.1) через ковариантно постоянный спинор, имеем

$$\nabla J = 0.$$

В частности отсюда следует $N^i_{jk} = 0$. То есть многообразие с ковариантно постоянным спинором является *комплексным многообразием.*

Кривизна Римана и Риччи На самом деле $\nabla J = 0$ гораздо сильнее условия N^i_{jk} и это накладывает дополнительные ограничения на K. Для этого заметим (из формулы (1.4.3)), что

$$g_{pq} J^p{}_m J^q{}_n = g_{mn},\ \omega_{mn} = g_{mp} J^p{}_n = -\omega_{nm} \tag{1.4.8}$$

а также

$$\nabla\omega = \nabla g I = 0 \implies d\omega = 0.$$

Такие многообразия с такой тройкой (g, I, ω), где $\omega = gI,\ I$ ортогонален и $\mathrm{d}\omega = 0$ называются *Кэлеровыми* и они обладают рядом замечательных свойств, которыми произвольные комплексные многообразия не обладают. В голоморфных координатах для Кэлеровых многообразий имеем

$$\omega_{i\bar{j}} = i g_{i\bar{j}},\ \partial_i g_{j\bar{k}} - \partial_j g_{i\bar{k}} = 0,\ \overline{\partial_i} g_{j\bar{k}} - \overline{\partial_k} g_{j\bar{i}} = 0.$$

Последние два условия следуют из замкнутости формы и являются условиями интегрируемости метрики

$$g_{i\bar{j}} = \partial_i \overline{\partial_j} K,\ \omega = i\partial\bar{\partial} K$$

для некоторой определённой локально функции K, которая называется Кэлеровым потенциалом.

Из существования потенциала следуют значительные упрощения. Например из символов Кристоффеля

$$\Gamma^k_{mn} = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_m g_{nl} + \partial_n g_{ml} - \partial_l g_{mn})$$

выживают только $\Gamma^i_{jk},\ \Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}}$ соответственно

$$\Gamma^i_{jk} = g^{i\bar{l}} \partial_j g_{k\bar{l}},\ \Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}} = \bar{\Gamma}^i_{jk}.$$

Это означает, что ковариантные производные голоморфных полей голоморфны, то есть при параллельном переносе голоморфные и антиголоморфные поля полностью разделяются. Для тензора Римана опуская первую пару индексов имеем

$$R^k{}_l = \mathrm{d}\Gamma^k{}_l + \Gamma^k{}_p \wedge \Gamma^p{}_l,$$

то есть отличны от нуля только компоненты с k и l одновременно (анти-)голоморфными. Опуская индекс и используя симметрию при перестановке пар индексов получаем, что ненулевыми являются только компоненты типа $R_{i\bar{j}k\bar{l}}$ (и получающиеся симметриями). Отсюда следует формула

$$R_{i\bar{j}\bar{l}}^{\ \ \bar{k}} = \partial_i \Gamma^{\bar{k}}_{\bar{j}\bar{l}}.$$

Чтобы найти тензор Риччи, используем первое тождество Бьянки:

$$R_{mnkl} + R_{mkln} + R_{mlnk} = 0 \implies R_{i\bar{j}k\bar{l}} + R_{i\bar{l}\bar{j}k} = 0.$$

Тогда тензор Риччи равен следу оператора кривизны со знаком минус

$$\mathrm{Ric}_{k\bar{j}} = -R_{i\bar{j}k}^{\ \ \ i} = -g^{i\bar{l}} R_{i\bar{j}k\bar{l}} = -g^{i\bar{l}} R_{k\bar{j}i\bar{l}} = -R_{k\bar{j}i}^{\ \ \ i}.$$

то есть получаем

$$\mathrm{Ric}_{k\bar{j}} = -\partial_k \Gamma^{\bar{l}}_{\bar{l}\bar{j}} = -\partial_k \overline{\partial_j} \ln \det g.$$

Так же как и из метрики, из тензора Риччи можно сделать 2-форму с помощью J.

$$\mathrm{Ric} = i \mathrm{Ric}_{j\bar{k}} \mathrm{d}y^j \wedge \overline{\mathrm{d}y^k} = -i\partial\bar{\partial} \ln \det g.$$

С кривизной непосредственно связано такое понятие как *голономия.* А именно из определения $R_{i\bar{j}l}^{\ \ \ k} = [\nabla_i, \nabla_{\bar{j}}]^k_l$ следует, что при параллельном переносе вектора v^k вдоль маленького контура C он изменяется на

$$\delta v^k = a^{i\bar{j}} R_{i\bar{j}l}^{\ \ \ k} v^l,$$

где $a^{i\bar{j}} = \oint_C y^i \mathrm{d}\bar{y}^{\bar{j}}$. В частности для Кэлеровых многообразий оба индекса l, k голоморфные или антиголоморфные, то есть матрица преобразования $a^{i\bar{j}} R_{i\bar{j}l}^{\ \ \ k}$, которая априори лежит в $\mathfrak{so}(6)$, также коммутирует с комплексной структурой, то есть принадлежит в действительности алгебре $\mathfrak{u}(3) \subset \mathfrak{so}(6)$. Ещё большее ограничение получаем в случае многообразий Калаби-Яу. Действительно, $a^{i\bar{j}} R_{i\bar{j}l}^{\ \ \ l} = -a^{i\bar{j}} R_{i\bar{j}}$, но тензор Риччи равен нулю для Калаби-Яу, то есть матрица преобразования бесследовая и лежит в $\mathfrak{su}(3) \subset \mathfrak{u}(3)$. Оказывается все свойства, которые мы обсуждали, можно вывести из существования метрики с голономией $\mathfrak{su}(3)$.

Голоморфная 3-форма и первый класс Черна В примерах (кроме тривиальных) явный вид метрик $g_{i\bar{j}}$ с голономией $\mathfrak{su}(3)$ не известен. Тем не менее мы можем построить ещё один объект, который уже можно построить явно и который будет играть важную роль в вычислениях:

$$\Omega_{ijk} = i\zeta_-^\dagger \gamma_{ijk} \zeta_+, \ \Omega = \frac{1}{6} \Omega_{ijk} \mathrm{d}y^i \wedge \mathrm{d}y^j \wedge \mathrm{d}y^k \tag{1.4.9}$$

J, Ω - это единственные объекты, которые можно получить, используя киральные спиноры. $\nabla\zeta = 0 \implies \nabla\Omega = 0$. В комплексных координатах

$\nabla_{\bar{i}} = \overline{\partial_i}$. Из этого следует что она нигде не обращается в ноль и $\bar{\partial}\Omega = 0$, то есть эта форма голоморфна. Отсюда имеем $\mathrm{d}\Omega = 0$, поскольку она уже имеет максимальное число голоморфных индексов.

Мы не знаем явные $\mathfrak{su}(3)-$метрики на Калаби-Яу, но есть неявный критерий, который следует из теоремы Яу. Он гласит, что если *первый класс Черна* Кэлерова многообразия равен нулю, то на нём существует метрика $\mathfrak{su}(3)$ голономии, то есть оно является многообразием Калаби-Яу.

Классы Черна комплексного многообразия являются элементами когомологий, то есть формы c_i степени $2i$ такие, что $\mathrm{d}c_i = 0$, и которые рассматриваются с точностью до прибавления точных форм $c_i \sim c_i + \mathrm{d}\alpha$. Обозначая $R^k{}_l = 1/2 R_{i\bar{j}l}{}^k \mathrm{d}y^i \wedge \overline{\mathrm{d}y^j}$ для них можно записать явную формулу:

$$\sum_i c_i t^i = \det\left(\mathrm{Id} + \frac{itR}{2\pi}\right) \tag{1.4.10}$$

и в частности

$$c_1 = \frac{i\mathrm{Tr}R}{2\pi} = -\frac{\mathrm{iRic}}{2\pi},$$

и на Калаби-Яу первый класс Черна определённо равен нулю. Более того, если на Кэлеровом мноообразии существует незануляющаяся нигде форма максимальной степени, то $c_1 = 0$. Действительно, для голоморфной 3-формы Ω имеем

$$\Omega_{ijk} = f(z)\epsilon_{ijk},\ ||\Omega||^2 = \Omega_{ijk}\bar{\Omega}^{ijk} = |f(z)|^2 g^{i\bar{i}} g^{j\bar{j}} g^{k\bar{k}} \epsilon_{ijk}\epsilon_{\overline{ijk}} = |f(z)|^2 \det g.$$

Тогда для класса Черна имеем

$$c_1 \sim \mathrm{Ric} = -i\partial\bar{\partial}\ln\det g = -i\partial\bar{\partial}\ln(||\Omega||^2).$$

Функция под логарифмом везде определена однозначно, а поэтому $c_1 = d\alpha$, то есть равен нулю в когомологиях.

Вышесказанное можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1 *Пусть K - 6-мерное вещественное многообразие.* [1] *Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. На K существует ковариантно постоянный спинор $\nabla\zeta = 0$ для некоторой метрики.

2. На K существует метрика $\mathrm{SU}(3)$ голономии.

3. K является Кэлеровым многообразием с Риччи-плоской метрикой $R_{ij} = 0$.

[1] если выбросить условие существования ковариантного спинора, то теорема будет верна для любой чётной размерности многообразия

4. K является Кэлеровым и его первый класс Черна равен нулю $c_1 = 0$.

5. K является Кэлеровым многообразием и на нём есть нигде не нулевая голоморфная форма старшей степени Ω.

Проделаем то же самое рассуждение используя понятие голономии.

1) $\iff$ 2)

Рассмотрим шестимерное риманово многообразие. У него есть естественное главное расслоение реперов касательного пространства со структурной группой $SO(6)$. Спиноры лежат в ассоциированном с ним расслоении, которое является спинорным представлением $SO(6)$ [2]

Связность Леви-Чивиты порождает связность на каждом из этих расслоений. Параллельный перенос элементов расслоения вдоль петель из некоторой точки в себя действует на них элементом из подгруппы SO(6), которая называется группой голономии многообразия. В частности сечение ковариантно постоянно если и только если это действие тривиально. Действительно, в таком случае мы можем параллельно продолжить сечение из одной точки в другую, а тривиальность действия голономии означает, что это продолжение не зависит от пути, и обратно.

Таким образом для пространства компактификации группа голономии должна тривиально действовать на какой-то спинор. Спиноры на M^6 преобразуются в представлении $\mathbf{4} + \bar{\mathbf{4}}$ алгебры $\mathfrak{su}(4) \simeq \mathfrak{so}(6)$. Наибольшая подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{su}(4)$, имеющая инвариантное подпространство в $\mathbf{4}$ и $\bar{\mathbf{4}}$ это $\mathfrak{h} = \mathfrak{su}(3)$, при этом $\mathbf{4}_{\mathfrak{su}(4)} = \mathbf{3}_{\mathfrak{su}(3)} + \mathbf{1}_{\mathfrak{su}(3)}$. На более простом языке матрицы 3×3 имеют в четырёхмерном пространстве неподвижный вектор. Таким образом, мы получили, что для существования ковариантно постоянного спинора группа голономии многообразия должна быть не больше, чем SU(3). Многообразия, допускающие метрику с такой голономией, называются многообразиями Калаби-Яу. [3].

2) $\implies$ 3), 4), 5)

Изучим геометрические следствия SU(3) голономии. Во-первых многообразие с голономией даже U(3) является комплексным и более того, кэлеровым.

Итак, если на многообразии есть метрика с голономией U(3), построим ковариантно постоянную комплексную структуру J, $\nabla J = 0$. Для этого будем действовать также, как и для спинора. Касательные вектора принадлежат

[2] правильнее было бы говорить о двулистном накрытии Spin(6) группы SO(6). Также мы не обсуждаем некоторые аспекты глобального поведения, связанные с неодносвязностью.

[3] заодно мы получили, что условие существования спинорного расслоения равносильно тому, что структурная группа многообразия редуцируется до $\mathfrak{su}(N)$

$6_{\mathfrak{so}(6)} \simeq 3_{\mathfrak{u}(3)} \oplus \bar{3}_{\mathfrak{u}(3)}$. В комплексификации касательного пространства в некоторой точке зададим J в виде матрицы

$$J = \begin{pmatrix} i\,E & 0 \\ 0 & -i\,E \end{pmatrix} \tag{1.4.11}$$

где E - это единичная 3×3 матрица, а базис выбран так, чтобы матрицы преобразования голономии имели вид

$$g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} \tag{1.4.12}$$

По построению оператор J коммутирует с группой голономии, и таким образом мы можем его параллельно продолжить на всё многообразие. След оператора кривизны является $\mathfrak{u}(1)$ генератором группы голономии в разложении $\mathfrak{u}(3) = \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{su}(3)$, то есть если голономия лежит в $\mathfrak{su}(3)$ то метрика является Риччи-плоской и наоборот. Более того, след тензора кривизны также является представителем первого класса Черна, поэтому голономия $\mathrm{SU}(3)$ означает, что многообразие является Кэлеровым и с нулевым классом Черна c_1.

Теперь покажем наличие ненулевой голоморфной три-формы. Голоморфные три-формы лежат в представлении $\Lambda^3 3_{\mathfrak{su}(3)} \sim 1_{\mathfrak{su}(3)}$, то есть форма не преобразуется под действием голономии, а значит её можно построить в одной точке

$$\Omega_{ijk} = \epsilon_{ijk}$$

и разнести связностью на всё многообразие K.

4) $\iff$ 5)

Вспомним, что

$$c_1 = \frac{i}{2\pi} \mathrm{Tr} R_{i\bar{j}},$$

где R_{ij} - кривизна любой связности на касательном расслоении. Связность в касательном пространстве порождает связность и на формах максимальной степени, легко видеть, что её кривизна совпадает со следом кривизны с точностью до знака

$$[\nabla_i, \nabla_j]\omega_{klm} = -R^p_{ijp}\omega_{klm},$$

а значит классы Черна $c_1 = i/2\pi \mathrm{Tr} R$ у касательного расслоения и расслоения форм совпадают со знаком минус. Ненулевая голоморфная 3-форма Ω_{ijk} задаёт всюду определённый базис в одномерном расслоении $\Lambda^3 T^* K$, таким образом получаем $\mathbb{C} \times K = \Lambda^3 T^* K$. На тривиальном расслоении можно выбрать нулевую связность, потому первый класс Черна равен нулю. Если же одномерное расслоение нетривиально, то его первый класс Черна всегда отличен от нуля.

4), 5) $\implies$ 1), 2), 3) Из сложной теоремы Яу, использующей геометрические потоки следует, что на кэлеровом компактном многообразии с нулевым первым классом Черна существует Риччи плоская метрика (то есть метрика голономии $\subset \mathrm{SU}(3)$). Явный вид этой метрики не известен для нетривиальных примеров и на практике используют многообразия удовлетворяющие условиям 4), 5).

Когомологии многообразий Калаби-Яу В теории струн, изучая компактификации можно применить приём аналогичный тому, что применяется в теории Калуцы-Клейна. А именно физические поля эффективной десятимерной теории (SUGRA) можно разложить по собственным векторам операторов, которые входят в Лагранжиан и проинтегрировать по свёрнутым компактным измерениям. В получившейся четырёхмерной теории будут наборы частиц, чьи массы пропорциональны собственным значениям операторов, по одной на каждый собственный вектор. В пределе, когда мы считаем массы очень большими и не интересуемся массивными частицами, количество частиц определяется нуль-модами операторов. Эти операторы сводятся к различным операторам Дирака и Лапласа на компактном многообразии, их нуль моды - гармонические объекты представляют некоторые классы когомологий многообразия. В итоге число безмассовых частиц четырёхмерной теории после компактификации Калуцы-Клейна определяется когомологиям шестимерного многообразия.

Элементы когомологий представимы замкнутыми дифференциальными формами с точностью до точных.

$$\alpha \in H^n(K) \implies d\alpha = 0,\ \alpha \sim \alpha + d\gamma. \tag{1.4.13}$$

Теория Ходжа утверждает, что можно выбрать естественного представителя из класса эквивалентности. На многообразиях K с метрикой есть естественная метрика на пространстве дифференциальных форм

$$(\alpha,\beta) = \int_K (\alpha,\beta)\sqrt{g}\mathrm{d}^6 y = \int_K \alpha\wedge\star\beta \mathrm{d}^6 y. \tag{1.4.14}$$

Соответственно можно определить сопряжённый дифференциал d^*, понижающий сепень формы на 1 и оператор Лапласа (Лапласа-Бельтрами)

$$(\mathrm{d}^*\alpha,\beta) = (\alpha,\mathrm{d}\beta),\ \mathrm{d}^* = \pm\star\mathrm{d}\star,\ \Delta_d = \mathrm{d}^*\mathrm{d} + \mathrm{d}\mathrm{d}^*. \tag{1.4.15}$$

На функциях $\Delta_d = -\Delta$, где Δ- обычный оператор Лапласа. При этом по теореме Ходжа произвольная форма раскладывается в сумму

$$\omega = \tilde{\omega} + \mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}^*\beta, \tag{1.4.16}$$

где $\Delta_d\tilde{\omega} = 0 \iff \mathrm{d}\tilde{\omega} = 0$ и $\mathrm{d}^*\tilde{\omega} = 0$. Опуская сложности из функционального анализа это следует из-за того, что $\Omega^p(K) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{d}\oplus\mathrm{Im}\,\mathrm{d}^*$. Таким образом при выборе оператора Δ_d возникает естественное отождествление пространства когомологий и пространства *гармонических форм*, то есть нулевых мод оператора Лапласа. Мы будем активно использовать это соответствие.

Для комплексных многообразий есть естественное разложение

$$\mathrm{d} = \partial + \bar{\partial} = \mathrm{d}y^i \partial_i + \overline{\mathrm{d}y^i \partial_i} \tag{1.4.17}$$

Пространства дифференциальных форм разбиваются в $\Omega^n(K) = \sum_{p+q=n} \Omega^{p,q}(K)$. Для Кэлеровых многообразий используя Кэлеровы тождества можно проверить, что операторы Лапласа, построенные по всем трём операторам $\mathrm{d}, \partial, \bar{\partial}$ равны:

$$\Delta_{\partial} = \Delta_{\bar{\partial}} = 1/2\Delta_d, \ \Delta_d = dd^* + d^*d,$$

Из этого и из того, что классы когомологий находятся во взаимно однозначном соответствии с классами гармонических форм, следует, что разбиение дифференциальных форм продолжается до разбиения когомологий $H^n(K) = \sum_{p+q=n} H^{p,q}(K)$. На пространстве всех когомологий действует оператор комплексного сопряжения $H^{p,q} \to H^{q,p}(K)$ и оператор Ходжа $H^{p,q}(K) \to H^{n-q,n-p}(K)$. Обозначим $h^{p,q} = \mathrm{dim} H^{p,q}$ Для трёхмерного Кэлерова многообразия независимыми остаются $h^{p,0}, h^{1,1}, h^{2,1}$. Ограничимся рассмотрением связных компактных многообразий с голономией строго $\mathrm{SU}(3)$, что означает, что мы требуем минимальной суперсимметрии при компактификации.

Условие гармоничности $\Delta_{\bar{\partial}}\omega$ для $\omega^{p,0}$ совпадает с условием голоморфности.

$$\Delta_{\bar{\partial}}\omega^{p,0} = 0 <=> \bar{\partial}\omega = 0, \ \bar{\partial}^*\omega = 0,$$

последнее равенство выполнено автоматически, поскольку $\bar{\partial}$ делает из (p,q) формы $(p,q-1)$ форму. Таким образом необходимо узнать число голоморфных $(p,0)$ форм. Для этого заметим, что они преобразуются как $\Lambda^p \mathbf{3}_{\mathfrak{su}(3)}$ под действием группы голономии. Это означает, что единственными ковариантно постоянными формами могут быть формы старшей степени. Используя формулу Вайценбоха о связи оператора Лапласа и ∇^2

$$\Delta_{\mathrm{d}}\omega = -\nabla^2\omega + \mathrm{R}[\omega],$$

где $R[\omega]$ некоторый оператор степени 0, зависящий от кривизны, мы находим, что гармонические $(p,0)$ формы на компактном многообразии ковариантно постоянны. А это значит, что для $1 < p < n$ все $h^{p,0} = 0$. Форма же старшей степени (голоморфная форма объёма) преобразуется как синглет под действием $\mathfrak{su}(3)$ и поэтому гармоническую форму $\Omega \in \mathscr{H}^{n,0}$ мы строим аналогично построению ковариантно постоянного спинора и комплексной структуры. Более того, две такие формы отличаются на голоморфную функцию, а значит на константу, то есть $h^{n,0} = 1$. Заметим, что её существование можно было получить из условия того, что $c_1 = 0$. Таким образом из всех $h^{p,q}$ на трёхмерном Калаби-Яу могут быть различными только $h^{1,1}$ и $h^{2,1}$. Эти же числа переставляются так называемой зеркальной симметрией, которая утверждает, что для Калаби-Яу K найдётся зеркальный образ - другое многообразие КЯ $\hat{K}$ с переставленными числами Ходжа.

Когомологии и деформации комплексной/Кэлеровой структур Рассмотрим деформации метрики на Калаби-Яу $g_{mn} \to g_{mn} + h_{mn}$, оставляющие многообразие в классе Калаби-Яу, то есть Риччи-плоские вариации. Условие $Ric(g_{mn} + h_{mn}) = 0$ выражается через оператор Лихнеровича:

$$\Delta_L h_{mn} = \nabla^2 h_{mn} + 2R_{m\ n}^{\ p\ q} h_{pq} = 0 \tag{1.4.18}$$

На Калаби-Яу уравнения для смешанных $h_{i\bar{j}}$ и однородных $h_{\bar{i}\bar{j}}$ деформаций метрики разделяются приводя к

$$h_{\bar{i}}^{j} \in H^{0,1}(TK),\ h_{i\bar{j}} \in H^{1,1}(K) \tag{1.4.19}$$

Деформации $h_{i\bar{j}}$ не меняют комплексную структуру на многообразии, но меняют Кэлерову структуру (в координатах она совпадает с метрикой). Напротив, деформации $h_{\bar{i}\bar{j}}$ меняют комплексную структуру, поскольку у метрики появляются ненулевые однородные коэффициенты. Из такого $h_{\bar{j}}^{i}$ можно построить *дифференциал Бельтрами*

$$h^i = h_{\bar{j}}^{i} \overline{\mathrm{d}y^j} \tag{1.4.20}$$

Этот дифференциал характеризует изменение комплексной структуры по правилу

$$\mathrm{d}y^i \to \mathrm{d}y^i + \epsilon h_{\bar{j}}^{i} \overline{\mathrm{d}y^j}.$$

Однородные компоненты метрики устраняются вещественной заменой координат $y^i \to y^i + 1/2m^i(y, \bar{y})$. Далее используя голоморфную форму можно отождествить $H^1(TK) = H^{2,1}(K)$ следующим образом:

$$h_{ij\bar{k}} = \Omega_{ijl} h_{\bar{k}}^{l}, \tag{1.4.21}$$

где гармоничность левой части эквивалентна гармоничности правой части.

Таким образом элементы из $H^{2,1}(K)$ отождествляются с деформациями комплексной структуры, а элементы из $H^{1,1}(K)$ с деформациями Кэлеровой структуры на K. На этих пространствах есть естественные метрики. Например, для деформаций комплексной структуры имеем $h_{\bar{i}\bar{j}}^{a} \sim \partial g_{\bar{i}\bar{j}} / \partial z^a$, где a - индекс, нумерующий элементы когомологий $H^{2,1}(K)$.

Безмассовые поля четырёхмерных теорий после компактификации Калуцы-Клейна Для того, чтобы связать гармоничесие формы с полями четырёхмерной теории, необходимо вспомнить состав полей десяти- и четырёхмерных теорий. Для определённости рассмотрим теорию типа IIA. Она содержит следующие поля, составляющие один $N = (1, 1)$ гравитационный супермультиплет

$$\begin{aligned} &G_{MN}, B_{MN}, \Phi, (C_1)_M, (C_3)_{MNK} \\ &\psi_M^{(+)}, \psi_M^{(-)}, \lambda^{(-)}, \lambda^{(+)} \end{aligned} \tag{1.4.22}$$

где все фермионы (гравитино и дилатино) - майорана-вейлевские 16ти компонентные спиноры.

Эти поля входят в эффективное действие десятимерной теории (1.2.48).

$$S_{eff}[\Phi^A] = \int_{\mathbb{R}^{1,3}\times K} \mathrm{d}^{10}w \; L(\Phi^A), \tag{1.4.23}$$

где мы обозначили все поля теории через Φ^A.

Теперь применим метод компактификации Калуцы-Клейна к десятимерной супергравитации компактифицированной на трёхмерное комплексное многообразие Калаби-Яу. При этом каждое из полей десятимерной теории нужно разложить по нулевым модам дифференциального оператора, возникающего из кинетического члена в компактной части (оператора Лапласа, Дирака или Лихнеровича). Например для дилатона, 1-формы и B-поля Кальба-Рамона имеем

$$\begin{aligned} \Phi(w) &= \sum_i \Phi^i(x)\cdot\Phi^i(y),\; \Delta_y\Phi^i(y) = \lambda^i\Phi^i(y) \\ (C_1)_M(w) &= \sum_i c^i_\mu(x)\cdot\phi^i(y) + \sum_i \phi^i_{C_1}(x)\cdot c^i_m(y). \\ B_{MN}(w) &= \sum_i b^i_{\mu\nu}(x)\cdot\phi^i(y) + \sum_i b^i_\mu(x)\cdot(c_B)^i_n(y) + \sum_i \phi^i_B(x)\cdot b^i_{mn}(y) \end{aligned} \tag{1.4.24}$$

Каждое из полей $\Phi^i(x)$, $c^i_\mu(x)$, $\phi^i_{C_1}(x)$, $b^i_{\mu\nu}$, b^i_μ, ϕ^i_B будет отвечать некоторому четырёхмерному полю с $m^2 \sim \lambda^i$ после интегрирования по y^m в десятимерном действии. Таким образом безмассовые поля отвечают нулевым модам соответствующего оператора. Мы уже установили, что нулевые моды операторов отвечают гармоническим формам, таким образом каждой гармонической форме отвечает некоторый набор полей четырёхмерной теории.

Более того, полученные четырёхмерные поля естественным образом группируются в супермультиплеты $d = 4$ $N = 2$ супергравитации.

Генераторы d=4 суперсимметрии. На 10-мерной супергравитации в бэкграунде $\mathbb{R}^{1,3}\times K$ действует ненарушенная алгебра d=4 N=2 суперпуанкаре. Чётная часть состоит из сдвигов, поворотов и бустов 4-мерной компоненты.

Построим 4*2 генератора суперсимметрии, относительно которых инвариантен вакуум. Они строятся из генераторов суперсимметрии полной теории $\epsilon_A(w)Q^A$.

$$\hat{Q}^{\alpha} = Q^{\alpha,a}\eta_a^{+}(y),\ \hat{Q}^{\dot{\alpha}} = Q^{\dot{\alpha},\dot{a}}\eta^{-}_{\dot{a}(y)}, \tag{1.4.25}$$

где $\eta^{\pm}$ - ковариантно постоянный спинор правой/левой киральности на Калаби-Яу и $Q^{\alpha,a} = Q^A$, где мы разбили индекс 10-мерного спинора по индексам четырёх- и шестимерного.

Мультиплеты соответствующие $h^{1,1}$ в IIA и IIB. Теперь проиллюстрируем разложение на мультиплеты на примере векторного мультиплета в четырёхмерной теории, то есть мультиплета, содержащего вектор, два спинора и скаляр.

$$(A_\mu, \chi, \tilde{\chi}, \phi) \tag{1.4.26}$$

Комбинируя эти поля с полями, получаемыми из гармонических форм, мы должны получить поля десятимерной теории. Пусть $b_{i\bar{j}} \in H^{1,1}(K)$. По этой форме можно построить несколько гармонических объектов:

$$\begin{aligned} \eta_{i,\dot{a}} &= b_{i\bar{j}}(y)\,\gamma^{\bar{j}}_{\dot{a}b}\,\zeta_b, \\ \eta_{\bar{i},a} &= b^{\bar{l}}_{i}(y)\,\bar{\Omega}_{\bar{l}\bar{j}\bar{k}}(y)\,\gamma^{\bar{j}}_{a\dot{b}}\,\gamma^{\bar{k}}_{\dot{b}c}\,\zeta_c \end{aligned} \tag{1.4.27}$$

только эти объекты, получающиеся естественным образом из $(1,1)$ формы могут привести к каким-то полям десятимерной теории. Тогда имеем

$$\begin{aligned} A_\mu(x)\cdot b_{i\bar{j}}(y) &= (C_3)_{\mu i\bar{j}}(w) \\ \chi_\alpha(x)\cdot\eta_{i,\dot{a}}(y) &= \psi^{(-)}_{i,\dot{A}}(w) \\ \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}(x)\cdot\eta_{i,\dot{a}}(y) &= \psi^{(+)}_{i,A}(w) \\ \tilde{\chi}_\alpha(x)\cdot\eta_{\bar{i},a}(y) &= \psi^{(+)}_{\bar{i},A}(w) \\ \bar{\tilde{\chi}}_{\dot{\alpha}}(x)\cdot\eta_{\bar{i},a}(y) &= \psi^{(-)}_{\bar{i},\dot{A}}(w) \\ \phi(x)\cdot b_{i\bar{j}}(y) &= g_{i\bar{j}}(w) + iB_{i\bar{j}}(w) \end{aligned} \tag{1.4.28}$$

Здесь использовалось отождествление спиноров на Калаби-Яу с $\Omega^{0,q}$:

$$\psi \sim \eta\zeta_{(+)} + \eta_{\bar{i}}\gamma^{\bar{i}}\zeta_{(+)} + \eta_{\bar{i}\bar{j}}\gamma^{\bar{i}\bar{j}}\zeta_{(+)} + \eta_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}}\gamma^{\bar{i}\bar{j}\bar{k}}\zeta_{(+)} \tag{1.4.29}$$

Посмотрим, как генератор четырёхмерной суперсимметрии действует на поля этого мультиплета, например на скаляр. Для D=10 имеем

$$\delta_\epsilon B_{i\bar{j}}(w) = 2\bar{\epsilon}\left(\gamma_i\psi^{(+)}_{\bar{j}} - \gamma_{\bar{j}}\psi^{(+)}_{i}\right) + \cdots \tag{1.4.30}$$

раскладывая это выражение по модам из предыдущей формулы, получаем

$$\delta_\epsilon\phi_B(x)\cdot b_{i\bar{j}}(y) = 2\bar{\epsilon}\left(\gamma_i\cdot\tilde{\chi}_\alpha\cdot\eta_{\bar{i},a}(y) - \gamma_{\bar{j}}\cdot\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}\cdot\eta_{i,\dot{a}}\right) + \cdots \tag{1.4.31}$$

Теперь используем формулы (1.4.27) для η и $\zeta^{(-)} = \bar{\Omega}_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}}\zeta^{(+)}$, чтобы перемножить гамма-матрицы

$$\delta_\epsilon \phi_B(x) \cdot b_{i\bar{j}}(y) = 2\bar{\epsilon}\left(\tilde{\chi}_\alpha \cdot \tilde{b}_{i\bar{j}}(y) \cdot \zeta_a^{(+)} + \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \cdot \tilde{b}_{i,\bar{j}}(y)\zeta_{\dot{a}}^{(-)}\right) + \cdots \tag{1.4.32}$$

И, наконец, вспоминая, что $\hat{Q}^\alpha = Q^{\alpha,a} \cdot \zeta_a^{(+)}(y)$, получаем в компонентах

$$\begin{aligned} \hat{Q}_\alpha \phi_B(x) \cdot b_{i\bar{j}}(y) &= 2\tilde{\chi}_\alpha \cdot b_{i\bar{j}}(y) + \cdots \\ \hat{Q}_{\dot{\alpha}} \phi_B(x) \cdot b_{i\bar{j}}(y) &= 2\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \cdot b_{i\bar{j}}(y) + \cdots \end{aligned} \tag{1.4.33}$$

То есть в суперсимметричной вариации Φ_B под действием одного из двух наборов $\hat{Q}^\alpha$ появляются $\bar{\chi}$, $\tilde{\chi}$, соответствующие тому же элементу когомологий, представленному гармонической формой $b_{i\bar{j}}(y)$. Действуя другим набором, можно получить χ, $\bar{\tilde{\chi}}$.

Таким образом по каждой из $h^{1,1}$ гармонических форм в теории типа IIA мы можем построить векторный мультиплет 4х-мерной теории гравитации. Аналогично можно показать, что используя формы из $H^{2,1}(K)$ можно построить $h^{2,1}+1$ гипермультиплетов в четырёхмерной теории.

В теории типа IIB наоброт можно построить $h^{2,1}$ векторных мультиплетов и $h^{1,1}+1$ гипермультиплетов. Тогда $IIA(K) = IIB(\hat{K})$, где K и $\hat{K}$ - зеркальная пара многообразий Калаби-Яу с переставленными числами Ходжа.

Четырёхмерный гипермультиплет содержит поля

$$(\tilde{\phi}, \chi, \tilde{\chi}, \phi) + \text{h.c.} \tag{1.4.34}$$

Десятимерный киральный $N = (2,0)$ гравитационный мультиплет (то есть гравитационный мультиплет теории IIB) состоит из полей:

$$\begin{aligned} &G_{MN}, B_{MN}, \Phi, C_0, (C_2)_{MN}, (C_4^+)_{MNKL} \\ &\psi_M^{(+)}, \tilde{\psi}_M^{(+)}, \lambda^{(-)}, \tilde{\lambda}^{(-)} \end{aligned} \tag{1.4.35}$$

Из тех же объектов $b_{i\bar{j}}$, $\eta_{i,\dot{a}}$, $\eta_{\bar{i},a}$ получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(x) \cdot b_{i\bar{j}}(y) &= (C_2)_{i\bar{j}}(w) + (C_4)^+_{\mu\nu i\bar{j}}(w) \\ \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}(x) \cdot \eta_{i,\dot{a}}(y) &= \psi^{(+)}_{i,A}(w) \\ \bar{\tilde{\chi}}_{\dot{\alpha}}(x) \cdot \eta_{i,\dot{a}}(y) &= \tilde{\psi}^{(+)}_{i,A}(w) \\ \chi_\alpha(x) \cdot \eta_{\bar{i},a}(y) &= \psi^{(+)}_{\bar{i},\dot{A}}(w) \\ \tilde{\chi}_\alpha(x) \cdot \eta_{\bar{i},a}(y) &= \tilde{\psi}^{(+)}_{\bar{i},A}(w) \\ \phi(x) \cdot b_{i\bar{j}}(y) &= g_{i\bar{j}}(w) + iB_{i\bar{j}}(w) \end{aligned} \tag{1.4.36}$$

Четрыёхмерная два-форма $C_{\mu\nu} = C^{+}_{\mu\nu i\bar{j}}$ эквивалентна скалярному полю из-за электро-магнитной дуальности

$$\mathrm{d}C_{\mu\nu} = H_{\mu\nu\lambda},\ (*H_{\mu\nu\lambda}) = (*H)_\sigma = \mathrm{d}\tilde{C},$$

для скалярного поля $\tilde{C}$, где последнее уравнение - уравнения движения для исходной формы.

Из $(3,0)$ гармонической формы можно построить один гравитационный мультиплет, а также один гипермультиплет четырёхмерной теории. Используя дополнительные изоморфизмы (например вложение структурной групы в калибровочную) можно построить другие поля, которые, например, появляются в гетеротической теории струн.

Константы связи и метрика в эффективной четырёхмерной теории задаётся интегралами произведений гармонических форм, являющихся компактными частями десятимерных полей, по Калаби-Яу. Для удобства приведём таблицу перехода бозонных полей при компактификации:

u. grav d=4	u. hyp d=4	IIA grav d=10	hyp d=4 , $h^{2,1}$	vec d = 4 , $h^{1,1}$
$h_{\mu\nu}\cdot 1$	$-$	G_{MN}	$\phi\cdot\Omega_{ijl}h^{l}_{\bar{k}}$	$\phi\cdot h_{i\bar{j}}$
$-$	$b_{\mu\nu}\cdot 1$	B_{MN}	$-$	$\phi\cdot b_{i\bar{j}}$
$-$	$\phi\cdot 1$	Φ	$-$	$-$
$c_\mu\cdot 1$	$-$	C^1_M	$-$	$-$
$-$	$\phi\cdot c_{ijk}$	C^3_{MNK}	$\phi\cdot c_{ij\bar{k}}$	$V_\mu\cdot c_{i\bar{j}}$

(1.4.37)

u. grav d=4	u. hyp d=4	IIB grav d=10	hyp d=4 , $h^{1,1}$	vec d = 4 , $h^{2,1}$
$h_{\mu\nu}\cdot 1$	$-$	G_{MN}	$\phi\cdot h_{i\bar{j}}$	$\phi\cdot\Omega_{ijl}h^{l}_{\bar{k}}$
$-$	$b_{\mu\nu}\cdot 1$	B_{MN}	$\phi\cdot b_{i\bar{j}}$	$-$
$-$	$\phi\cdot 1$	Φ	$-$	$-$
$-$	$c\cdot 1$	C_0	$-$	$-$
$-$	$c_{\mu\nu}\dot{1}$	C^2_{MN}	$\phi\cdot c_{i\bar{j}}$	$-$
$V_\mu\cdot c_{ijk}$	$-$	C^{4+}_{MNKL}	$\tilde{c}_{\mu\nu}\cdot c_{i\bar{j}}$	$V_\mu\cdot c_{ij\bar{k}}$

(1.4.38)

В таблицах “u. grav./hyp” означают универсальный гравитационный/гипермультиплет, “hyp, grav, vec” - сокращения для гипермультиплетов, гравитационных и векторных мультиплетов.

Глава 2

Глава 2 : Специальная Кэлерова геометрия

2.1 N=2 d=4 супегравитация

Как было показано в предыдущем разделе, при компактификации теории суперструн на шестимерное (трёхмерное комплексное) многообразие Калаби-Яу в пределе низких энергий получается четырёхмерная теория супергравитации с материей, которая даётся таблицами 1.4.37 и 1.4.38 в случаях теорий типа IIA и IIB.

В этом разделе мы напомним геометрические свойства N=2 суперсимметричных теорий в четырёх измерениях. А именно, константы связи теории определяются так называемой специальной Кэлеровой геометрией [20, 87]. В следующих разделах мы покажем, как специальная геометрия возникает в бэкграундах теории струн, то есть при компактификации на многообразие Калаби-Яу или суперконформную теорию.

N=2 d=4 суперсимметричные теории N=2 алгебра суперсимметрии имеет вид

$$\begin{aligned} \{Q^A_\alpha, \bar{Q}^B_{\dot\beta}\} &= \delta^{AB}\Gamma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu, \\ \{Q^A_\alpha, Q^B_\beta\} &= Z^{AB}\epsilon_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Суперзаряды являются Вейлевскими и комплексно сопряжёнными друг другу $(Q^A_\alpha)^\dagger = C^{\dot\alpha}_\alpha \bar{Q}^A_{\dot\alpha}$. Ограничиваясь только первым суперзарядом получаем $N = 1$ - теорию. В $N = 1$ теории есть киральный мультиплет, который после интегрирования по служебного члена состоит из скаляра и одного Майорановского фермиона $(\phi^\mu, \chi^\mu_\alpha)$, при этом $\overline{\chi^\mu_\alpha} = C^{\dot\alpha}_\alpha \bar\chi^\nu_{\dot\alpha}$. Также имеется векторный мультиплет, состоящий из (Майорановского) фермиона и вещественного калибровочного поля (A_μ, λ_α).

Упоминавшиеся выше N=2 векторные мультиплеты (эти мультиплеты абелевы, их калибровочная группа равняется $U(1)$) раскладываются в сумму векторного и кирального мультиплетов

$$(A_\mu, \lambda_\alpha, \tilde{\lambda}_\alpha, \phi) = (A_\mu, \lambda_\alpha) + (\tilde{\lambda}_\alpha, \phi). \tag{2.1.2}$$

Гипермультиплет раскладывается в сумму двух сопряжённых киральных мультиплетов

$$(\chi, \Phi, \tilde{\bar{\Phi}}, \tilde{\chi}) = (\chi, \Phi) + (\tilde{\chi}, \tilde{\bar{\phi}}). \tag{2.1.3}$$

Мы сконцентрируемся на N=2 векторных мультиплетах, поскольку именно их константы связи определяются специальной Кэлеровой геометрией (константы связи гипермультиплетов определяются гипер-Кэлеровой и кватернионной Кэлеровой геометрией).

Рассмотрим теорию n N=2 векторных мультиплетов. С точки зрения $N = 1$ калибровочной сигма модели, таргет пространство скаляров является $n-$мерным Кэлеровым многообразием, то есть кинетический член в Лагранжиане имеет вид

$$\frac{1}{2} g_{i\bar{j}}(\phi) \partial^\mu \phi^i \partial_\mu \overline{\phi^j} + g_{i\bar{j}}(\phi) \bar{\tilde{\lambda}}^i \not{D} \tilde{\lambda}^j, \tag{2.1.4}$$

где метрика $g_{i\bar{j}} = \partial_i \overline{\partial_j} K(\phi, \bar{\phi})$ является Кэлеровой в силу $N = 1$ суперсимметрии.

С другой стороны, кинетический член вектор-мультиплета имеет вид

$$\frac{1}{8\pi} \left(Im(\tau_{ij}) F^i_{\mu\nu} F^{j,\mu\nu} - Re(\tau_{ij}) F^i_{\mu\nu} (\star F)^{j,\mu\nu} \right) - \frac{1}{2\pi} Im(\tau_{ij}) \bar{\lambda}^i \not{D} \lambda^j, \tag{2.1.5}$$

где τ - голоморфная функция от ϕ^i. Поскольку теория обладает $SU(2)_R$ R симметрией, которая поворачивает λ в $\tilde{\lambda}$, кинетические члены фермионов должны быть равны:

$$\frac{\tau_{ij} - \bar{\tau}_{ij}}{4\pi i} = \frac{\partial^2 K(\phi, \bar{\phi})}{\partial \phi^i \partial \overline{\phi^j}}. \tag{2.1.6}$$

Дифференцируя равенство по ϕ^i точностью до незначащего фактора получаем

$$\frac{\partial}{\partial \phi^i} \tau^{jk} = \frac{\partial^3 K(\phi, \bar{\phi})}{\partial \phi^i \partial \phi^j \partial \overline{\phi^k}}. \tag{2.1.7}$$

Уравнение выше можно проинтерпретировать как условие интегрируемости на τ_{ij}:

$$\tau_{ij} = \partial_i \partial_j F(\phi) \tag{2.1.8}$$

локально для некоторой голоморфной функции $F(\phi)$. Из (2.1.6) получаем, что

$$K(\phi, \bar{\phi}) = i(\phi^i \overline{\partial_i F(\phi)} - \overline{\phi^i} \partial_i F(\phi)). \tag{2.1.9}$$

Получается, что Кэлеров потенциал метрики на таргет многообразии $\mathscr{M}$ скаляров N=2 вектормультиплетов определяется по голоморфной функции, которая называется препотенциалом. Такая структура на $\mathscr{M}$ называется специальной Кэлеровой геометрией. Чтобы отличить её от структуры, возникающей в случае N=2 супергравитации её также называют жёсткой или глобальной (из-за глобальной суперсимметрии).

Если по координатам ϕ^i определить дуальные координаты $F_i := \partial_i F$, то Кэлеров потенциал запишется в виде $K = i(\phi^i \bar{F}_i - \bar{\phi}^i F_i)$. Симплектическая форма, построенная по метрике переписывается через дифференциалы координат ϕ^i, F_i:

$$\partial\bar{\partial}K = \frac{-1}{4}(\mathrm{d}\phi^i + \overline{\mathrm{d}\phi^i}) \wedge (\mathrm{d}F_i + \overline{\mathrm{d}F_i}). \tag{2.1.10}$$

При этом зануление чисто голоморфной и чисто антиголоморфной частей обеспечивается условиями интегрируемости:

$$\mathrm{d}F_i \wedge \mathrm{d}\phi^i = \mathrm{d}(F_i \mathrm{d}\phi^i) = \mathrm{d}\mathrm{d}F = 0. \tag{2.1.11}$$

Отсюда видно, что специальная Кэлерова геометрия инвариантна относительно вещественных симплектических преобразований вида

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}\tilde{\phi} \\ \mathrm{d}\tilde{F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}\phi \\ \mathrm{d}F \end{pmatrix}, \tag{2.1.12}$$

где $\mathrm{d}\phi,\ \mathrm{d}F$ вектора один-форм с компонентами $\mathrm{d}\phi^i,\ \mathrm{d}F_i$. Такие преобразования оставляют форму $\partial\bar{\partial}K$ инвариантной, в частности выполнены условия интегрируемости $\mathrm{d}(\tilde{F}_i \mathrm{d}\tilde{\phi}^i) = 0$, то есть локально найдётся голоморфный препотенциал $\tilde{F}$ такой, что $\tilde{F}_i = \partial/\partial\tilde{\phi}^i \tilde{F}$.

Эти симплектические преобразования являются ни чем иным как преобразованиями электро-магнитной дуальности, смешивающие напряжённости калибровочных полей $F^i_{\mu\nu}$ и их дуальные по Ходжу $\star F^j_{\mu\nu}$.

С точки зрения математики глобальная специальная геометрия соответствует изоморфизму $T\mathscr{M} \simeq V$, где V плоское расслоение со структурной группой $Sp(2n, \mathbb{R})$, а также наличию сечения $\Omega \in \Gamma(\mathscr{M}, V)$ такого, что Кэлерова форма ω на $\mathscr{M}$ равна

$$\omega = \frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}\langle\Omega, \overline{\Omega}\rangle, \tag{2.1.13}$$

а также

$$\langle\partial_i\Omega, \overline{\partial_j\Omega}\rangle = 0. \tag{2.1.14}$$

Спаривание $\langle\cdot,\cdot\rangle$ дано стандартным симплектическим спариванием на V.

N=2 супергравитация В присутствии супергравитации геометрия таргет пространства скаляров векторного мультиплета модифицируется по сравнению с N=2 суперсимметричной теорией без гравитации. В теории с гравитацией появляется универсальный гравитационный мультиплет. В N=2 теории он состоит из тетрады, двух гравитино и гравифотона

$$(E^M_\mu, \psi_{\mu,\alpha}, \tilde{\psi}_{\mu,\alpha}, A_\mu). \tag{2.1.15}$$

Отличие геометрии от случая теории без гравитации заключается в том, что гравифотон A_μ смешивается с фотонами материи, при этом симплектическая структура возникает в расслоении размерности $n+1$. Явный вид разложения гравифотона среди всех калибровочных полей следует из формулы для вариации гравитино:

$$\delta\psi_\mu^A = 2D_\mu\epsilon^A - \cdots - \frac{1}{4}\sigma^{\rho\sigma}\gamma_\mu Z^-_{\rho\sigma}\epsilon^{AB}\epsilon_B + \cdots\,, \tag{2.1.16}$$

где $Z^-_{\rho\sigma}$ - подходящим образом ковариантизованная комбинация напряжённостей калибровочных полей A^I_μ

Обычно N=2 теорию супергравитации строят в конформном формализме, при этом вводятся $n{+}1$ N=2 векторных сультиплетов и так называемый мультиплет Вейля, содержащий в себе гравитационные и вспомогательные поля. После фиксации калибровки из $n+1$-го векторного мультиплета выживает только калибровочное поле A^{n+1}_μ, которое становится гравифотоном. Обозначим “однородные координаты” таргет-пространства X^I так, что имеется калибровочная инвариантность $X^I \to e^{f(\phi)}X^I$, то есть X^I являются сечениями одномерного расслоения $\mathscr{L}$ над $\mathscr{M}$ или, что то же самое, однородными координатами. В этих координатах верно рассуждение для локального случая. В силу R-симметрии метрика кинетического члена калибровочных полей совпадает с метрикой на тотальном пространстве линейного расслоения $\mathscr{L}\to\mathscr{M}$. Обозначая метрику на тотальном пространстве расслоения, то есть метрику канонического кинетического члена для X^I за N_{IJ} из (2.1.9) получаем

$$N_{IJ} = i\partial_I\overline{\partial_J}(X^I\overline{F_I} - \overline{X^I}F_I) = i(F_{IJ} - \overline{F_{IJ}}), \tag{2.1.17}$$

где $F_I(X) = \partial/\partial X^I F(X)$, а препотенциал $F(X)$ теперь является однородной функцией степени два в силу калибровочной инвариантности метрики.

Из однородности следуют формулы

$$\frac{1}{2}X^IF_I = F,\ \partial_I N_{IJ}X^I = N_{IJ},\ \partial_I N_{IJ}X^I\overline{X^J} = N_{IJ}\overline{X^J}. \tag{2.1.18}$$

Метрика на многообразии скаляров $\mathscr{M}$, однако, теперь не является метрикой N_{IJ}, а её редукцией по действию группы $\mathbb{C}^* = U(1)\times\mathbb{R}^+$ из-за калибровочной инвариантности. Многообразие скаляров локально является фактором $(\mathbb{C}^{n+1}\backslash 0)/\mathbb{C}^*$, то есть картой в проективном пространстве. Метрика на $\mathscr{M}$ получается редукцией однородной метрики N_{IJ} на $\mathbb{C}^{n+1}$. Чтобы провести редукцию вдоль действия $\mathbb{C}^*$ введём оператор ортогональной проекции на плоскости ортогональные действию группы, то есть $(XN)_I(Pv)^I = 0$:

$$(Pv)^I = v^I - \frac{\overline{X^I}(NX)_Jv^J}{(XN\overline{X})} \tag{2.1.19}$$

Метрика на фактор-пространстве даётся формулой

$$G_{IJ}v^I\overline{w^J} = -\frac{N_{IJ}(Pv)^I\overline{(Pw)^J}}{XN\overline{X}}, \tag{2.1.20}$$

где знак выбран для положительной определённости и знаменатель делает метрику калибровочно инвариантной.

Подставляя явную формулу для проекции получаем

$$G_{I\bar{J}} = -\frac{N_{IJ}}{X^I N_{IJ}\overline{X^J}} + \frac{(NX)_I\overline{(NX)_J}}{(X^I N_{IJ}\overline{X^J})^2}, \tag{2.1.21}$$

или же

$$G_{I\bar{J}} = \partial_I\overline{\partial_J}K, \tag{2.1.22}$$

где

$$e^{-K(X,\bar{X})} = i(X^I\overline{F_I} - \overline{X^I}F_I). \tag{2.1.23}$$

В случае, если $F = X^2$, получается в точности метрика Фубини-Штуди на $\mathbb{C}P^n$. Заметим, что такой вид метрики явно не зависит от калибровки, поскольку при калибровочном преобразовании $X^I \to e^{f(X)}X^I$ имеем $K(X,\bar{X}) \to K(X,\bar{X}) + f(X) + \bar{f}(\bar{X})$.

На линейном расслоении $\mathscr{L}$ метрика и ковариантная производная задаются формулами

$$\begin{aligned} \langle s_1, s_2\rangle &= (XN\bar{X})^{-1}s_1\overline{s_2} = e^K s_1\overline{s_2}, \\ D_I s &= \partial_I s - \partial_I K\, s. \end{aligned} \tag{2.1.24}$$

Помимо самой метрики все константы связи теории выражаются через голоморфный препотенциал $F(X)$. Например, $F_{IJK}(X)$ являются (в подходящей нормировке) константами связи Паули, то есть каплингами двух фермионов и напряжённости фотона.

Математически структура локальной специальной геометрии на $\mathscr{M}$ описывается следующим образом: имеется плоское $Sp(2n+2,\mathbb{R})$ голоморфное расслоение $V \to \mathscr{M}$, линейное расслоение $\mathscr{L} \to \mathscr{M}$ и сечение их тензорного произведения $\Omega \in \Gamma(\mathscr{M}, V\otimes\mathscr{L})$ такие, что Кэлерова форма ω на $\mathscr{M}$ задаётся по формуле

$$\omega = -\frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\langle\Omega,\overline{\Omega}\rangle, \tag{2.1.25}$$

(в частности, $c_1(\mathscr{L}) = \omega$) и

$$\langle\Omega, D_I\Omega\rangle = \langle\Omega, \partial_I\Omega - \partial_I K\Omega\rangle = \langle\Omega, \partial_I\Omega\rangle = 0. \tag{2.1.26}$$

2.1.1 Нелинейные сигма модели

Мы знаем, что при компактификации теории струн типа II на трёхмерное комплексное многообразие Калаби-Яу получается четырёхмерная N=2 супергравитация. Описав состав материи и калибровочных полей в компактифицируемой теории и геометрию констант связи мы можем перейти к вычислению геометрии конкрентных моделей четырёхмерной гравитации.

Как описано в предыдущем разделе, константы связи векторных мультиплетов четрырёхмерной N=2 супергравитации в принципе выражаются через одну голоморфную функцию специальных координат, называемую препотенциалом.

В этом разделе мы покажем, как специальная Кэлерова геометрия возникает из геометрии пространства комплексных и Кэлеровых модулей многообразий Калаби-Яу.

В каждом случае имеются свои особенности и специальные режимы, тем не менее зеркальная симметрия утверждает, что для семейства многообразий K_{phi} найдётся многообразие $\check{K}$ такое, что специальная геометрия на пространстве комплексных деформаций K_ϕ совпадает в определённой области со специальной геометрией Кэлеровых деформаций многообразия $\check{K}$.

Константы связи четырёхмерной теории и геометрия многообразий Калаби-Яу При описании мы ограничимся безмассовым сектором теории струн, который в низкоэнергетическом пределе описывается супергравитацией.

В прошлом разделе мы показали, что безмассовые поля теории струн соответствуют когомологиям компактифицирующего пространства Калаби-Яу $H^{2,1}(K),\ H^{1,1}(K)$. Более того, мы показали, что элементы этих когомологий соответствуют малым Риччи-плоским деформациям комплексной и Кэлеровой структур на K, то есть пространству модулей многообразия Калаби-Яу K.

На пространстве модулей есть естественная метрика,

$$G_{a\bar{b}} = \int_K h_a \wedge \bar{h}_{\bar{b}} \tag{2.1.27}$$

Это ничто иное, как метрика, возникающая в кинетическом члене эффективной теории. Проиллюстрируем это на простом примере теории IIB. А именно рассмотрим кинетический член 4-формы $(C_4)^+_{MNKL}(w)$

$$\int \mathrm{d}^{10}w\sqrt{g}\,(\mathrm{d}C_4)^{+,MNKLP}(\mathrm{d}C_4)^+_{MNKLP} = \int \mathrm{d}^4x\,\partial_\mu c_4\partial^\mu c_4 \int \mathrm{d}^6y\sqrt{g}\,c_{ij\bar{k}}c^{ij\bar{k}}. \tag{2.1.28}$$

Второй интеграл в последнем выражении совпадает с метрикой на пространстве модулей. Для других полей того же мультиплета потребуется ещё пара промежуточных вычислений.

Также на пространстве деформаций имеется симметричный тензор третьей степени

$$\kappa_{abc} = \int_K \Omega \wedge (h^i_a \wedge h^j_b \wedge h^k_c \Omega_{ijk}) \qquad (2.1.29)$$

Этот тензор совпадает с константами Паули в эффективном действии, что можно показать аналогично

$$\int \mathrm{d}^{10}w\sqrt{g}\,(\mathrm{d}C_4^+)\bar{\psi}\Gamma\psi \sim \int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{F}^l_{\mu\nu}\bar{\chi}^i\sigma^{\mu\nu}\chi^j \int \mathrm{d}^6y\sqrt{g}\,(\Omega_{ijl}h^l \wedge \eta^i \wedge \eta^j) \wedge \Omega, \qquad (2.1.30)$$

где $\psi, \bar{\psi}$ - десятимерные гравитино, Γ - некоторая комбинация 10-мерных гамма-матриц, $\mathcal{F}^l_{\mu\nu}$ ковариантизованная напряжённость четырёхмерного калибровочного поля, а $\chi, \bar{\chi}$ - четырёхмерные калибрино (детали в этой формуле опущены). Итак, чтобы вычислить константы, определяющие эффективную теорию, нам нужно вычислить геометрию пространства модулей K.

Геометрия комплексных модулей многообразий Калаби-Яу Элементы из $H^{2,1}(K)$ отождествляются с деформациями комплексной структуры, а элементы из $H^{1,1}(K)$ с деформациями Кэлеровой структуры на K. Деформации комплексной структуры можно понимать разными эквивалентными способами. Один из них, это начиная с многообразия Калаби-Яу K с симплектической формой $\omega_{\mu\nu}$ и эрмитовой метрикой $g_{\mu\nu}$ так, что тензор комплексной структуры равен $J^\mu_\nu = \omega_{\nu\lambda}g^{\lambda\mu}$. Деформации комплексной структуры можно рассматривать Риччи-плоские деформации метрики $g_{\mu\nu}$, не меняющие симплектической формы $\omega_{\mu\nu}$. На пространстве деформаций комплексных структур таким образом есть естественная метрика возникающая из метрики на пространстве метрик.

Второй способ, к которому мы прийдём возник из алгебраической геометрии, и заключаеься в рассмотрении семейства многообразий $\mathscr{K} \to \mathscr{M}$ с базой являющейся пространством модулей комплексных структур. такому, что слой этого семейства $K_\phi \subset \mathscr{K}$ является многообразием Калаби-Яу и $K_0 = K$. Хорошим примером являются семейства многобразией заданные уравнениями, например уравнение

$$X_1^5 + X_2^5 + X_3^5 + X_4^5 + X_5^5 + \phi X_1X_2X_3X_4X_5 = 0 \subset \mathbb{P}^4 \qquad (2.1.31)$$

определяет такое семейство с базой с координатой ϕ. В дальнейшем будет показано, что естественной координатой на базе будет не ϕ, а ϕ^5. В этом подходе вакуумные средние полям, соответствующим модулям определяют комплексную структуру на K, то есть конкретный элемент семейства. В таких семействах есть особые слои, когда многообразие вырождается, что соответствует вырожденности метрики в первом подходе. Окрестности таких точек зачастую легче поддаются явным вычислениям. С физической точки зрения вырождение многообразия, то есть стягивание внутри него определённых циклов свидетельствует о том, что бесконечная башня тяжёлых Калуца-Клейновских частиц становится безмассовой, поэтому приближение четырёхмерной супергравитации непосредственно перестаёт работать. С другой точки зрения, сами сингулярности многообразия зачастую являются чисто математическими, то есть “сглаживаются” в теории струн, которая хорошо определена в них.

Сингулярные локусы в семействах задаются наборами комплексных уравнений, а потому имеют коразмерность как минимум два, то есть любые две комплексные структуры на многообразии можно получить путём вдоль гладких многообразий, в частности, как и должно быть, все неособые многообразия в семействе изоморфны как вещественные многообразия. С другой стороны, вокруг многообразий коразмерности 2 существуют нестягиваемые петли, то есть можно обойти в пространстве полей вдоль сингулярности. При этом возникает феномен монодромии. Особенно важными оказываются сингулярности с так называемой максимально унипотентной монодромией, которые имеют прозрачное описание предела большого объёма при зеркальной симметрии.

Рассмотрим бесконечно малые деформации комплексной структуры $h^a_{\bar{i}\bar{j}} \sim \partial g_{\bar{i}\bar{j}}/\partial z^a$, где a - индекс, нумерующий элементы когомологий $H^{2,1}(K)$. Естественную метрику на пространстве модулей комплексных структур можно получить из метрики Полякова/де-Витта на пространстве метрик

$$G_{a\bar{b}} = \frac{1}{\mathrm{Vol}(K)} \int_K \mathrm{d}^6 y\; g^{1/2}\; g^{i\bar{i}} g^{j\bar{j}}\, \partial_a g_{\bar{i}\bar{j}}\, \partial_{\bar{b}} g_{ij}. \tag{2.1.32}$$

Эта метрика переписывается в чисто когомологических терминах

$$G_{a\bar{b}} = \frac{\int_K h_a \wedge \overline{h_b}}{\int_K \Omega \wedge \overline{\Omega}} = \partial_a \overline{\partial_b} \log \int_K \Omega \wedge \overline{\Omega}, \tag{2.1.33}$$

где вариации метрики переписаны через соответствующие гармонические $(2,1)$ формы h_a

$$(h_a)_{ij\bar{k}} = \frac{1}{2}\, \partial_a g_{\bar{k}\bar{l}}\, g^{\bar{l}s}\; \Omega_{sij}. \tag{2.1.34}$$

Используя явное выражение для форм получаем первое равенство в (2.1.33), то есть спаривание $(2,1)$ - равняется норме вариации метрики:

$$\begin{aligned}\int_K h_a \wedge \bar{h}_{\bar{b}} = \int_K \partial_a g_{\bar{k}\bar{l}} \partial_{\bar{b}} g_{kl} g^{\bar{l}s} g^{l\bar{s}} \Omega_{sij} \bar{\Omega}_{\bar{s}\bar{i}\bar{j}} \mathrm{d}^6 y \sim \\ \sim ||\Omega||^2 \int_K \partial_a g_{\bar{k}\bar{l}} \partial_{\bar{b}} g_{kl} g^{\bar{l}s} g^{l\bar{s}} \varepsilon_{sij} \varepsilon_{kij} \varepsilon_{\bar{s}\bar{i}\bar{j}} \varepsilon_{\bar{k}\bar{i}\bar{j}} \mathrm{d}^6 y\end{aligned} \tag{2.1.35}$$

Чтобы доказать Кэлеровость метрики, то есть второе равенство в (2.1.33), нам потребуется следующая лемма, оригинально подмеченная Кодаирой, а сейчас называемая трансверсальностью Гриффитса:

$$\partial_a \Omega = k_a \Omega + h_a \tag{2.1.36}$$

Заметим, что если переход от старых голоморфных к новым голоморфным координатам задаётся формулой

$$y^i \to y^i + m^i(y, \bar{y}),\ \mathrm{d}y^i \to \bar{\partial} m^i + \mathrm{hol}. \tag{2.1.37}$$

то вследствие того, что в новых координатах $g_{\bar{i}\bar{j}=0}$ и формулы для замены переменных в метрике

$$\frac{\partial g_{\bar{i}\bar{j}}}{\partial z^a} = -\left(\frac{\partial m^r}{\partial \bar{y}^{\bar{j}}} g_{r\bar{i}} + \frac{\partial m^r}{\partial \bar{y}^{\bar{i}}} g_{r\bar{j}} \right). \tag{2.1.38}$$

Из последней формулы имеем $1/2\bar{\partial}_{\bar{a}} g_{\bar{i}\bar{j}} = -(\bar{\partial}_{\bar{i}} m^r) g_{r\bar{j}}$

Тогда для доказательства формулы (2.1.36) применим тождество Лейбница:

$$\partial_a \Omega = \partial_a \Omega_{123}\, \mathrm{d}y^1 \wedge \mathrm{d}y^2 \wedge \mathrm{d}y^3 + 3\Omega_{123}\, (\partial_a \mathrm{d}y^1) \wedge \mathrm{d}y^2 \wedge \mathrm{d}y^3 \tag{2.1.39}$$

и используем формулу (2.1.37). Компонента $(3,0)$ формы $\partial_a \Omega$ замкнута, а потому пропорциональна самой Ω с некоторой константой пропорциональности $k_a \Omega$, поскольку когомологии $H^{3,0}$ одномерны.

Теперь второе равенство в (2.1.33) проверяется явным дифференцированием Кэлерова потенциала с применением этой леммы.

В итоге мы показали, что метрика на пространстве модулей комплексных структур является Кэлеровой, её Кэлеров потенциал задаётся формулой

$$e^{-K} = \int_K \Omega \wedge \overline{\Omega}. \tag{2.1.40}$$

Теперь покажем, что на самом деле у метрики есть также препотенциал, то есть пространтво модулей комплексных структур является специальным Кэлеровым многообразием. Для этого нужно плоское симплектическое расслоение на пространстве модулей. Такой структрой является расслоение целочисленных когомологий $H^3(K, \mathbb{Z}) \to \mathscr{M}$ над пространством модулей с симплектической формой заданной спариванием Пуанкаре. Это расслоение является плоским, поскольку все многообразия с деформированной комплексной структуры изоморфны как вещественные многообразия. Чтобы вычислить препотенциал выберем симплектический базис в $A^a,\ B_a \in H_3(K, \mathbb{Z})$ и дуальный $\alpha_a, \beta^a \in H^3(K, \mathbb{Z})$, $a = 1, 2$, то есть такие, что

$$
\begin{aligned}
\int_{A^b} \alpha_a = \int_K \alpha_a \wedge \beta^b = \delta_a^b, \\
\int_{B_a} \beta^b = \int_K \beta^b \wedge \alpha_a = -\delta_a^b, \\
\int_K \alpha_a \wedge \alpha_b = \int_K \beta^a \wedge \beta^b = 0.
\end{aligned} \tag{2.1.41}
$$

Такой базис всегда можно выбрать, поскольку он эквивалентен приведению кососимметричесой формы пересечений к форме Дарбу. При этом циклы A^c являются Пуанкаре дуальными к b^c, а циклы B_c дуальными к a_c.

Также определим периоды голоморфной 3-формы Ω.

$$
z^a = \int_{A^a} \Omega, \ F_b = -\int_{B_b} \Omega \tag{2.1.42}
$$

Тогда по построению имеем $\Omega = z^a \alpha_a - F_b \beta^b$. Более того, z^a можно использовать как (однородные) координаты на пространстве деформаций комплексных структур. Используя лемму Кодаиры получаем

$$
\begin{aligned}
0 = \int_K \Omega \wedge \partial_c \Omega = \int_k (z^a \alpha_a - F_b \beta^b) \wedge (\alpha_c - \partial_c F_d \beta^d) = \\
= -z^a \partial_c F_a + F_c = 0
\end{aligned} \tag{2.1.43}
$$

Из последнего равенства получаем, что

$$
F_a = \partial_a F(z), \ F(z) = \frac{1}{2} z^a F_a \tag{2.1.44}
$$

Последнее выражение называется препотенциалом, все интересующие нас геометрические величины на пространстве модулей могут быть вычислены через него. Например Кэлеров потенциал метрики K вычисляется следующим образом:

$$
e^{-K} = \int_k \Omega \wedge \bar{\Omega} = \overline{z^a} \partial_a F(z) - z^a \overline{\partial_a F(z)} \tag{2.1.45}
$$

в полном соответствии с формулой для локальной специальной Кэлеровой геометрии (2.1.23). В ряде работ введён дополнительный префактор $-i$, чтобы Кэлеров потенциал был вещественным, однако нормировка потенциала не вляет на метрику, поэтому мы будем игнорировать этот коэффициент. Введём ещё одно удобное обозначение для полного вектора периодов:

$$
\Pi = (z^a, F_b)^t. \tag{2.1.46}
$$

Используя его можно переписать формулу для Кэлерова потенциала в виде

$$
e^{-K} = \Pi^t \Sigma \Pi, \tag{2.1.47}
$$

где $\Sigma_{ij} = \delta_{i,j-h_{1,1}+1} - \delta_{i-h_{1,1}+1,j}$ симплектическая единица (спраривание Пуанкаре в симплектическом базисе).

Вычислим трёхточечные корреляционные функции, а именно константы Юкавы (в теории струн типа IIB эти величины определяют константы Паули, а не Юкавы. Однако в гетеротической теории струн они определяют Юкавские константы. Исторически, такие трёхточечные функции в отрыве от теории струн принято называть константами Юкавы)

$$\kappa_{abc} = \int_K \Omega \wedge (h_a \wedge h_b \wedge h_c \Omega) = \int_K \Omega \wedge \partial_a \partial_b \partial_c \Omega, \tag{2.1.48}$$

где $h_a \wedge h_b \wedge h_c \Omega$ означает $(0,3)$ форму $(h_a)^i_{\bar{l}}\,(h_a)^j_{\bar{m}}\,(h_a)^k_{\bar{n}}\,\Omega_{ijk}$.

Используя выражение формы Ω через периоды получаем

$$\kappa_{abc} = \int_X (z^d \alpha_d - F_e \beta^e) \wedge F_{abcf} \beta^f = z^d F_{abcd} = F_{abc} = \partial_a \partial_b \partial_c F. \tag{2.1.49}$$

Таким образом, для вычисления интересующих струнных констант связи необходимо найти препотенциал для пространства модулей деформаций комплексных структур на многообрази Калаби-Яу. Суперсимметрия обеспечивает, что эти константы в эффективной теории оказываются точными и не содержат поправок из сигма модели.

Сравнивая полученные формулы с общими определениями специальной геометрии получаем, что плоское симплектическое расслоение V является расслоением когомологий: $H^3(K,\mathbb{Z}) \to \mathscr{M}$, линейной расслоение $\mathscr{L}$ совпадает с расслоением голоморфной 3-формы $H^{3,0}(K)$.

Каждый из периодов Π_i явлется сечением расслоения $\mathscr{L}$, то есть преобразуются также как Ω при калибровочном преобразовании $\Omega \to f(\phi)\Omega$. На этом расслоении есть связность [20, 87]

$$\mathscr{D}_a \Omega = \partial_a \Omega - \partial_a K\, \Omega = h_a, \tag{2.1.50}$$

являющаяся связностью Черна для явно калибровочно инвариантной метрики

$$\langle s_1, s_2 \rangle = e^K\, s_1\, \overline{s_2}. \tag{2.1.51}$$

То есть ковариантная производная $\mathscr{D}_a$ переводит $H^{3,0}(K)$ в $H^{2,1}(K)$. Используя комплексное сопряжение и спаривание Пуанкаре проверяется, что

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_a h_b &= e^K \kappa_{abc}\, G^{c\bar{c}}\, \overline{h_c}, \\ \mathscr{D}_a \overline{h_b} &= G_{a\bar{b}}\, \overline{\Omega}. \end{aligned} \tag{2.1.52}$$

Сделаем также замечание о трансверсальности Гриффитса. Как было показано,

$$\partial_a \Omega = \partial_a K\, \Omega + h_a. \tag{2.1.53}$$

Чтобы обобщить эту формулу введём понятие *фильтрации Ходжа.* Фильтрацией называется исчерпание векторного пространства (расслоения) другими пространствами (расслоениями). Фильтрация Ходжа - это исчерпание пространства когомологий компонентами разложения Ходжа

$$H^{3,0}(K) = F^3H^3 \subset F^2H^3 \subset F^1H^3 \subset F^0H^3 = H^3(K,\mathbb{C}), \tag{2.1.54}$$

где

$$\begin{aligned} F^pH^3 &:= \bigoplus_{i\geq p} H^{i,3-i}(K), \\ F^pH \cap \overline{F^{3-p}H} &= H^{p,3-p}(K), \\ F^{p+1}H \cap \overline{F^{3-p}H} &= 0. \end{aligned} \tag{2.1.55}$$

Операция дифференцирования ∂_a вдоль комплексных модулей, то есть вдоль базы семейства многообразий K_ϕ, является (плоской) связностью в расслоении $H^3(K,\mathbb{C}) \to \mathscr{M}$. Эта связность называется связностью Гаусса-Манина [62, 94] $\partial_a = \nabla_a^{GM}$, она полностью определяется тем, что целочисленные классы когомологий являются ковариантно постоянными. В таких обозначениях трансверсальность Гриффитса записывается как условие на связность Гаусса-Манина.

$$\nabla^{GM} \ : \ F^PH \to F^{p-1}H. \tag{2.1.56}$$

Более того, в случае трёхмерных многообразий Калаби-Яу все трёхмерные когомологии порождаются производными голоморфной формы объёма Ω [18]. Вся структура семейства Кэлервых многообразий с расслоением когомологий и связностью Гаусса-Манина называется *вариацией структур Ходжа.* Преимущество фильтраций Ходжа по сравнению с разложением заключается в том, что в фильтрации не используется понятие комплексного сопряжения, и их можно рассматривать с чисто голоморфной точки зрения.

Мы вернёмся к обсуждению когомологий на языке фильтрации Ходжа при изучении теорий Ландау-Гинзбурга, а пока лишь заметим, что разложение Ходжа эквивалентно фильтрации Ходжа вместе с комплексным сопряжением или *вещественной структурой.*

Геометрия Кэлеровых модулей многообразия Калаби-Яу При компактификации теории струн типа IIA на многообразие Калаби-Яу векторные мультиплеты нумеруются гармоническими формами типа $(1,1)$. Это ни что иное, как деформации Кэлеровой формы на многообразии K. Таким образом, если при компактификации теорий типа IIB изменение вакуумных средних меняло само многообразие K, то в случае IIA многообразие остаётся неизмеменным, меняется лишь Кэлеров класс, то есть обобщение “объёма” многообразия. В дальнейшем мы будем объёдинять Кэлерову форму с B-полем

$\omega_{\mathbb{C}} = \omega + iB$, которое интерпретируется, как мнимая часть комплексифицированного Кэлерова класса метрики. Несмотря на то, что само многообразие не меняется (по крайней мере локально) при деформации Кэлерова класса, геометрия Кэлеровых модулей оказывается сложнее геометрии комплексных модулей. Одно из таких усложнений заключается в том, что в добавок к выражению, полученному из супергравитации специальный Кэлеров потенциал получает квантовые поправки в виде голоморфных инстантонов, то есть от конфигураций, когда струна отображается не в точку на K, а наматывается на двумерный цикл. Вклад таких поправок естественно пропорционален обратной экспоненте от объёма цикла. Учёт таких вкладов сейчас может быть произведён систематически, тем не менее, изначально единственным способом вычислять все вклады от голоморфных инстантонов был используя зеркальную симметрию, то есть T-дуальность теорий типа IIA и IIB и вычисляя специальную геометрии комплексных модулей зеркального многообразия.

В пространстве Кэлеровых модулей многообразий Калаби-Яу есть различные интересные режимы. Например, самый простой пример - предел большого объёма, то есть предел, при котором абсолютная величина Кэлеровой формы стремится к бесконечности. В этом режиме, очевидно, голоморфные инстантоны экспоненциально подавляются, и специальная геометрия выражается классически через числа пересечения 2-форм на K.

Интересным отличием от случая комплексных модулей является наличие *фаз* в пространсте Кэлеровых модулей. Компоненты разложение Кэлерового класса по целочисленному базису когомологий равняются объёмам дуальных циклов в Кэлеровой метрике. В частности, когда вещественная часть какой-то из компонент Кэлерова класса стремится к нулю, в многообразии стягивается двумерный цикл, и оно вырождается. Формально можно продолжать уменьшать значение Кэлерова класса до отрицательных значений, при этом в многообразии K происходит бирациональная перестройка или *флоп*. Чтобы представить флоп, рассмотрим вырожденное многообразие K_0, в котором стянут один из двумерных циклов. Тогда может существовать несколько естественных способов разрешить особенность - K, K'. При этом решётки двумерных когомологий многообразий будут естественно изоморфны. При этом оказывается, что отрицательный Кэлеров класс на K соответствует положительному классу на K'.

Бывают более сложные случаи, когда флоп многообразия K не является многообразием, но тем не менее определяет суперсимметричную модель, например модель Ландау-Гинзбурга. Такие модели также могут быть использованы для определения струнной компактификации.

При зеркальной симметрии специальная геометрия на пространстве модулей комплексных структур K_ϕ переходит в *склейку* специальных геометрий на пространствах Кэлеровых модулей многообразий (или моделей в более общем случае) $\{\check{K}_i\}_{i\in I}$.

Более детально феномен фаз будет объяснён в третьей главе, где его можно проследить в терминах геометрической теории инваринатов.

Классическая геометрия Кэлеровых модулей Рассмотрим деформации комплексифицированного Кэлерового класса $\omega = J + iB$ на многообразии Калаби-Яу K. $\omega_a = i\delta_a g_{i\bar{j}} \partial y^i \wedge \overline{\partial y^j}$. Классически, то есть с точки зрения компактификации теории супергравитации, метрика на пространстве модулей также даётся метрикой на пространстве метрик:

$$G_{a\bar{b}} = \frac{1}{V}\int_K \mathrm{d}^6 y \sqrt{g}\, \delta_a g_{i\bar{j}} \overline{\delta_b g^{\bar{i}j}} = \frac{1}{V}\int_K \omega_a \wedge \star\overline{\omega_b}. \tag{2.1.57}$$

Введём обозначение для формы пересечения:

$$\kappa(\omega_1, \omega_2, \omega_3) := \int_K \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3. \tag{2.1.58}$$

В частности, $V = \kappa(J, J, J)/3!$. Для действия звезды Ходжа на 2-формах есть следующая формула:

$$\star\sigma = -J \wedge \sigma + \frac{3}{2}\frac{\kappa(\sigma, J, J)}{\kappa(J, J, J)} J \wedge J. \tag{2.1.59}$$

Подставляя её в (2.1.57) получаем

$$G(\omega_1, \omega_2) = -3\left(\frac{\kappa(\omega_1, \overline{\omega_2}, J)}{\kappa(J, J, J)} - \frac{3}{2}\frac{\kappa(\omega_1, J, J)\kappa(\overline{\omega_2}, J, J)}{\kappa^2(J, J, J)}\right). \tag{2.1.60}$$

Введём базис $\{e_a\}_{a \le h_{1,1}}$ в целочисленных когомологиях K. Тогда имеем разложение $J + iB = \sum_a w^a e_a$. Как проверяется дифференцированем, метрика G оказывается Кэлеровой с Кэлеровым потенциалом

$$G_{a\bar{b}} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial w^a}\frac{\partial}{\partial \overline{w^b}} \log \kappa(J, J, J). \tag{2.1.61}$$

Теперь легко проверить, что эта метрика также является специальной, а именно явно найти препотенциал. Для этого введём $\kappa_{abc} := \kappa(e_a, e_b, e_c)$. Препотенциал в (аффинных координатах) задаётся формулой:

$$f(w) := \frac{\kappa_{abc}}{3!} w^a w^b w^c. \tag{2.1.62}$$

Тогда вычисляем

$$\begin{aligned}\kappa(J, J, J) = \frac{1}{8}\kappa_{abc}(w^a + \overline{w^a})(w^b + \overline{w^b})(w^c + \overline{w^c}) = \\ = -\frac{3}{4}[2(f(w) - f(\bar{w})) - (w^a - \overline{w^a})(f_a(w) + f_a(w))].\end{aligned} \tag{2.1.63}$$

Можно ввести однородные координаты $W^A, 0 \le A \le h_{1,1}$, в которых $w^a = W^a/W^0$ и

$$F(w) = -\frac{1}{3!}\frac{\kappa_{abc}W^aW^bW^c}{W^0}. \tag{2.1.64}$$

Так определённый препотенциал является однородным степени 2 и

$$e^{-K} = i(W^a\overline{F_A} - \overline{W^a}F_A),\ W^0 = 1. \tag{2.1.65}$$

Явно получается, что

$$\kappa_{ABC} = \partial_A\partial_B\partial_C F(W), \tag{2.1.66}$$

то есть константы связи Паули в классическом случае являются числами пересечения соответствующих дифференциальных форм.

Инстантонные поправки В теории струн помимо непосредственно супергравитации возникают квантовые поправки, которые тем не менее можно вычислить точно. Эти поправки даются голоморфными инстантонами мировго листа струны. Предел супергравитации в теории струн соответствует только тем струнным конфигурациям, в которых струна отображается в точку на пространстве-времени, в то время, как голоморфные инстантоны представляют собой голоморфные отображения мирового листа струны на двумерные циклы на многообразии K. Проще всего подсчитать инстантонный вклад в трёхточечную корреляционную функцию. Пусть V_1, V_2, V_3 , будут вертексными операторами внутреннего сектора струнной конформной теории поля, которым соответствуют гармонические 2-формы $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ в гравитационном пределе. Например, бозонный вертексный оператор имеет вид

$$V_1(0) = V_{1,\mu\nu}(0) = (\partial_\mu a_\nu(X) - \partial_\nu a_\mu(X))\, \omega_{1,i\bar{j}}(Y)\psi^i\bar{\psi}^j\, V_{-1}\, e^{ik(X+Y)}(0). \tag{2.1.67}$$

Следуя [35] рассмотрим поправку рода 0, то есть от струн со сферической топологией, то есть лидирующую квантовую поправку по струнной константе связи α' к константе связи четырёхмерной супергравитации (каплингу Паули в случае теории IIA). Для этого рассмотрим корреляционную функцию трёх вертексных операторов, в которой функциональный интеграл берётся только по полям $Y^i(z)$ соответствующим координатам на компактном пространстве K и их суперпартнёрам. Вычисление удобно проводить с точки зрения N=(2,2) сигма модели на компактном пространстве K:

$$S_{Pol} = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int \mathrm{d}^2z\left(\sqrt{h}\,\partial^\mu Y^i\partial_\mu\overline{Y^j}g_{i\bar{j}}(X) + \mathrm{d}Y^i\wedge\overline{\mathrm{d}Y^j}b_{i\bar{j}}(X) + fermi.\right), \tag{2.1.68}$$

то есть будем брать функциональный интеграл только по внутренним координатам на K игнорируя все индексы четырёхмерного пространства $\mathbb{R}^{1,3}$.

При этом, в силу суперсимметрии, функциональный интеграл локализуется вокруг критических точек действия, классических и инстантонных конфигураций, то есть

$$\kappa \sim \int_{\bar{\mathscr{M}}_{0,3}(K)} \mathscr{D}f \; V_1(0)V_2(1)V_3(\infty)\, e^{-S[f]}, \tag{2.1.69}$$

где $\mathscr{M}_{0,3}(K)$ - подходящая компактификация пространства голоморфных отображений из сферы с тремя проколами в K. Только голоморфные отображения остаются в силу суперсимметрии [35].

$$\mathscr{M}_{0,3}(K) = \{f : \mathbb{C}P^1 \to K \mid f - \text{голоморфное отображение}\}. \tag{2.1.70}$$

Рассмотрим, как и выше, базис $\{e_a\}_{a\leq h_{1,1}}$ в целочисленных когомологиях так, что $J+iB = \sum_a w^a e_a$. Тогда для струны, которая наматываеся на дуальный к e_a цикл d_a раз имеем

$$S[f] = \sum_a w^a d_a = dw. \tag{2.1.71}$$

Чтобы вычислить корреляционную функцию явно разобьём пространство модулей по классам намотки $\mathscr{M}_{0,3}(K) = \bigsqcup_{d_a\geq 0} \mathscr{M}_{0,3}(K,d)$. Итоговое значение для коррелятора равняется

$$\kappa \sim \sum_d e^{wd} \int_{\bar{\mathscr{M}}_{0,3}(K,d)} ev_0^*(\omega_1)\wedge ev_1^*(\omega_2)\wedge ev_\infty^*(\omega_3), \tag{2.1.72}$$

где отображение вычисления $ev_i \;:\; \mathscr{M}_{0,3}(K) \to K$ задаётся формулой $ev_z(f) = f(z)$. Интегралы в (2.1.72) называются трёхточечными инвариантами Громова-Виттена многообразия K рода 0. Такому инварианту можно придать геометрический смысл. Рассмотрим H_1, H_2, H_3 - гиперповерхности в K Пуанкаре дуальные к $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Тогда инвариант Громова-Виттена степени d будет равняться числу голоморфных сфер степени d, проходящих через H_1, H_2 и H_3. В частности, для сфер нулевого объёма, $d=0$, получаем количество точек пересечения $H_1\cap H_2\cap H_3 = \kappa(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$. Таким образом, корреляционную функцию $\langle V_1(0)V_2(1)V_3(\infty)\rangle$ можно считать деформацией обычного числа пересечения для соответствующих 2-форм. Из Юкавской константы можно извлечь итоговый вид препотенциала с квантовыми поправками:

$$f(w) = \frac{1}{3!}\kappa_{abc}w^a w^b w^c + \frac{1}{2}a_a w^a w^b + b_a w^a - \frac{i}{16\pi^3}c + f_{inst}(w), \tag{2.1.73}$$

a_{ab}, b_a, c - некоторые константы (в принципе для них есть естественные значения выражающиеся через топологию многообразия K), а

$$\begin{aligned} f_{inst}(w) &= \frac{1}{(2\pi i)^3} \sum_{d\in H_2(K\mathbb{Z})\setminus\{0\}} N_d Li_3(q^d), \\ Li_k(q) &= \sum_{n\geq 1} \frac{q^n}{n^k}. \end{aligned} \tag{2.1.74}$$

Константы N_d считают инстантонные числа рода ноль без накрытий, учёт которых даётся функцией $Li_3(q^d)$.

Квантовые когомологии и Фробениусовы многообразия Пространство модулей Кэлеровых деформаций метрики естественно совпадает с пространством вторых когомологий $H^2(X, \mathbb{C})$ (с точностью до фактора по дискретной группе). При этом, как обсуждалось выше, при выходе за границу определённой области в $H^2(X, \mathbb{C})$ многообразие X подвергается бирациональной перестройке - флопу или вообще перестаёт быть многообразием. На $H^2(X, \mathbb{C})$ появляется структура специальной Кэлеровой геометрии, как обсуждалось выше. Специальная геометрия задаётся голоморфным препотенциалом $f(w)$ от Кэлеровых параметров. Этот же препотенциал задаёт ещё одну замечательную структуру, уже на пространстве всех когомологий

$$H^*(X, \mathbb{C}) = H^0(X, \mathbb{C}) \oplus H^2(X, \mathbb{C}) \oplus H^4(X, \mathbb{C}) \oplus H^6(X, \mathbb{C}). \tag{2.1.75}$$

Эта структура известна в математике под названием квантовых когомологий [51, 91] $QH^*(X, \mathbb{Q})$, которые являются деформацией обычных групп гомологий.

Как обсуждалось выше, для односвязных многообразий Калаби-Яу $H^2(X) = H^{1,1}(X)$. Дуальность Ходжа влечёт

$$H^4(X) = H^{2,2}(X) \simeq H^{1,1}(X). \tag{2.1.76}$$

Таким образом, мы будем рассматривать только когомологии вида $H^{*,*}(X) := H^{i,i}(X)$ и построим структуру квантовых когомологий на нём, хотя, в принципе, никто не мешает построить её на полной группе когомологий $H^*(X)$.

На $H^{*,*}(X)$ есть невырожденная блочно-антидиагональная метрика:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_X \alpha \wedge \beta. \tag{2.1.77}$$

Тогда обычное умножение в когомологиях можно определить через трёхточечную функцию:

$$\langle \alpha \wedge \beta, \gamma \rangle = \int_X \alpha \wedge \beta \wedge \gamma. \tag{2.1.78}$$

Как говорилось выше, теория струн даёт естественную квантовую поправку к трёхточечной функции:

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle_w &:= \sum_{d \geq 0} e^{dw} \int_{\bar{\mathscr{M}}_{0,3}(X,d)} ev_0^*(\alpha) \wedge ev_1^*(\beta) \wedge ev_\infty^*(\gamma) = \\ &= \int_X \alpha \wedge \beta \wedge \gamma + \sum_{d > 0} e^{dw} \int_{\bar{\mathscr{M}}_{0,3}(X,d)} ev_0^*(\alpha) \wedge ev_1^*(\beta) \wedge ev_\infty^*(\gamma). \end{aligned} \tag{2.1.79}$$

Используя квантово скорректированную трёхточечную функцию и метрику можно определить структуру *квантового умножения*

$$\langle \alpha \star \beta, \gamma\rangle := \langle \alpha, \beta, \gamma\rangle_w. \tag{2.1.80}$$

При этом для трёхмерных многообразий Калаби-Яу квантовое умножение однородно как и обычное умножение в когомологиях, то есть если $\alpha \in H^k(X)$, $\beta \in H^l(X)$, то есть $\alpha \star \beta \in H^{k+l}(X)$. Это умножение отличается от обычного только в случае $\alpha, \beta \in H^{1,1}(X)$. Рассмотрим структурные константы квантового умножениия. Введём в $H^{*,*}(X)$ базис e_A, $0 \le a \le 2h_{1,1}+1$ уважающий разложение по степеням, то есть $e_0 \in H^0(X)$, $e_a \in H^{1,1}(X)$, $1 \le a \le h_{11}$. В таком базисе метрика Пуанкаре имеет вид:

$$\begin{aligned} &\int_X e_A \wedge f_B = \eta_{AB}, \quad 0 \le A, B \le 2h_{1,1}+1, \\ &\int_X e_A \wedge e_B = \int_X f_A \wedge f_B = 0. \end{aligned} \tag{2.1.81}$$

Нетривиальные структурные константы имеют вид:

$$C_{ab}^D = \kappa_{abe}\eta^{eD}, \tag{2.1.82}$$

где κ_{abe} - это константы Паули с учётом квантовых поправок.

Структуры умножения и метрики возникающие на пространстве когомологий и квантовых когомологий являются частными случаями и важными примерами Фробениусовых алгебр и Фробениусовых многообразий соответственно.

Векторное пространство V с метрикой $\langle\cdot,\cdot\rangle$ вместе с ассоциативным, коммутативным умножением с единицей $* : V \times V \to V$ назывется Фробениусовой алгеброй (коммутативной с единицей), если выполнено условие согласования с метрикой:

$$\langle v * w, u\rangle = \langle v, w * u\rangle. \tag{2.1.83}$$

В частности, метрика эквивалентна *следом*, то есть функцией $\mathrm{Tr} : V \to \mathbb{C}$. по формулам

$$\mathrm{Tr}(v) = \langle 1, v\rangle, \quad \langle v, w\rangle = \mathrm{Tr}(v * w). \tag{2.1.84}$$

В случае когомологий след задаётся интегралом по многообразию $\mathrm{Tr}(\alpha) := \int_X \alpha$.

Фробениусово многообразие, это многообразие, каждое касательное пространство к которому является Фробениусовой алгеброй, а также выполнены условия интегрируемости.

Многообразие $\mathscr{M}$ с плоской метрикой η_{ij} называется Фробениусовым многообразием, если в каждой точке $p \in \mathscr{M}$ касательное пространство $T_p\mathscr{M}$ является Фробениусовой алгеброй с метрикой η_{ij} и выполнено условие интегрируемости:

$$[\nabla_i - z^{-1}C_i, \nabla_j - z^{-1}C_j] = 0, \tag{2.1.85}$$

где ∇_i - (плоская) связность Леви-Чивиты метрики η_{ij}, а C_i - оператор $\partial_i *$ умножения во Фробениусовой алгебре на касательный вектор ∂_i, $\partial_i * \partial_j = C_{ij}^k \partial_k$, и z^{-1} - формальная переменная.

Связность $\nabla_i - z^{-1} C_i$ можно понимать, как деформационное семейство плоских связностей с параметром z или как связность на расслоении $\pi^* T\mathscr{M}$, где $\pi : \mathscr{M} \times \mathbb{C}^* \to \mathscr{M}$ - естественная проекция.

Если расписать условие интегрируемости (2.1.85) по степеням z, то получатся уравнения ВДВВ в классической форме:

$$\begin{aligned} \partial_i C_{jk}^l = \partial_j C_{ik}^l, \\ C_{ij}^k C_{kl}^m = C_{jl}^k C_{ik}^m, \end{aligned} \tag{2.1.86}$$

то есть уравнения ассоциативности и интегрируемости структурных констант умножения. Условие согласованности с метрикой Фробениусовой алгебре влечёт, что структурные константы с опущенными индексами

$$C_{ijk} := C_{ij}^l \eta_{lk} \tag{2.1.87}$$

являются симметричным тензором по всем трём индексам. Отсюда и из уравнений интегрируемости следует наличие препотенциала для C_{ijk}:

$$C_{ijk} = \nabla_i \nabla_j \nabla_k F \tag{2.1.88}$$

для голоморфной функции F определённой локально.

В определении Фробениусовых многообразий также обычно предполагается наличие двухдополнительных структур:

1. $\nabla(\partial_1) = 0$, где ∂_1 - векторное поле соответствующее единице Фробениусовой алгебры в каждом касательном пространстве

2. Существует векторное поле Ейлера E со следующими свойствами:

   1) *градуирующий* оператор $Q := \nabla E$ ковариантно постоянен, то есть $\nabla\nabla E = 0$.

   2) однородность, однопараметрическая группа диффеоморфизмов построенная по E должна действовать конформными преобразованиями метрики η и перемасштабированиями Фробениусовых алгебр.

Второе условие на векторное поле Эйлера можно записать с помощью формул:

$$\begin{aligned} \nabla_i(\nabla_j E^k) = 0, \\ \mathscr{L}_E c_{ij}^k = c_{ij}^k, \\ \mathscr{L}_E \partial_1 = -\partial_1, \\ \mathscr{L}_E \eta_{ij} = D\eta_{ij} \end{aligned} \tag{2.1.89}$$

для некоторой константы $D = 2 - d$. $\mathscr{L}_E$ обозначает производную Ли вдоль векторного поля E. Поле Эйлера нужно понимать, как поле растяжений на $\mathscr{M}$. В интересующих нас примерах это поле будет выражать квазиоднородность Фробениусова многообразия.

Квантовые когомологии многообразия X, в частности интересующее нас ограничение на $H^{*,*}(X)$ являются важным примером Фробениусовых многообразий.

Для структурных констант квантового умножения на $H^{*,*}(X)$ имеется препотенциал

$$F(w^A) = f(w^a) + \sum_{A > h_{1,1}} w^A w^B w^0 \eta_{AB} + \frac{1}{2} w^{2h_{1,1}+1}(w^0)^2. \tag{2.1.90}$$

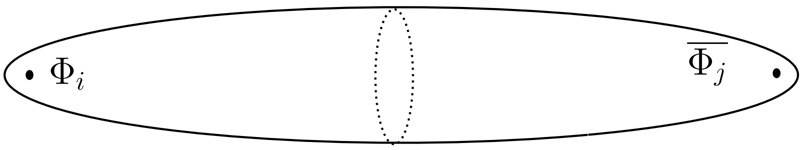
Первое слагаемое отвечает квантовому умножению 2-форм, второе уножению 2-формы на 4-форму, и последнее умножению 6-формы на скаляр. Этот потенциал является квазиоднородным степени 3, если приписать переменной w^A степень k в случае $e_A \in H^{k,k}(X)$. В частности, поле Эйлера имеет простой вид:

$$E = -w^0 \partial_{w^0} + \sum_{h_{1,1} < A \leq 2h_{1,1}} w^A \partial_{w^A} + 2w^{2h_{1,1}+1} \partial_{w^{2h_{1,1}+1}}. \tag{2.1.91}$$

Заметим, что если считать координаты w^A однородными и поделить препотенциал на w^0, то он будет в точности равен препотенциалу специальной Кэлеровой геометрии (по модулю незначащих квадратичных членов).

tt^* геометрия Фробениусовых многообразий Фробениусовы многообразия сам по себе "голоморфны", то есть если Фробениусово многообразие $\mathscr{M}$ комплексное, то метрика и структурные константы являются голоморфными тензорами, что соответствует корреляционным функциям топологической теории поля, или кирального сектора N=(2,2) суперсимметричной теории поля. Следущая по сложности структура состоит в спаривании полей из кирального и антикирального сектора. При этом, чтобы не возникало сложных для учёта поправок из промежуточных массивных состояний, используется проекция на основные состояния. Чтобы реализовать такую проекцию, рассматриваются корреляционные функции на бесконечно вытянутой сфере [26, 29], на одной половине которой произведён топологический твист, а на другой антитопологический твист.

С математической точки зрения это приводит к наличию дополнительной интегрируемой структуры на многообразии $\mathscr{M}$, а именно совместной с



$$\langle \Phi_j | e^{-TH} | \Phi_i \rangle$$

η_{ij} Эрмитовой метрики $g_{i\bar{j}} = \overline{g_{\bar{i}j}}$. Условия совместности задают интегрируемую систему [37]. Условия совместности удобно выписать через комплексную связность D_i заданную символами Кристоффеля $\Gamma^k_{ij} = \overline{\Gamma^{\bar{k}}_{\bar{i}\bar{j}}}$, являющейся связностью Леви-Чивиты для η_{ij} и связностью Черна для $g_{i\bar{j}}$:

$$\begin{aligned} &D_a v^b = \partial_a v^b + \Gamma^b_{ac} v^c, \\ &D_{\bar{a}} v^b = \overline{\partial_a} v^b, \\ &D_{\bar{c}} = \overline{D_c} \end{aligned} \tag{2.1.92}$$

и

$$D_a \eta_{bc} = 0,\ D_a g_{a\bar{b}} = 0. \tag{2.1.93}$$

В таком случае связность выражается формулой

$$\Gamma_c = g^{-1} \partial_c f,\ g = (g_{\bar{a}b}). \tag{2.1.94}$$

Тензор *вещественной структуры* определённый

$$M^b_{\bar{a}} := g_{\bar{a}c} \eta^{cb}, \tag{2.1.95}$$

удовлетворяет уравнениям

$$M\bar{M} = const\ 1. \tag{2.1.96}$$

Без потери общности, будем считать, что константа равняется единице. Тогда тензор M задаёт вещественную структуру на касательных пространствах к M так, что комплексное сопряжение на тензорах определено по правилу

$$\overline{v^a \partial_a} = M^b_{\bar{a}} \partial_b \overline{v^a}. \tag{2.1.97}$$

Согласованная пара (η, g) или тройка $(\eta, g, M = g\eta^{-1}$ определяет tt^*-геометрию или топологический-антитопологический фьюжн на Фробениусовом многообразии $\mathscr{M}$ если выполняются условия интегрируемости

$$\begin{aligned} &D_a C_b = D_b C_a, \\ &[D)a, \overline{D_b}] = -[C_a, C_{\bar{b}}], \end{aligned} \tag{2.1.98}$$

где

$$C_{\bar{b}} = M \overline{C_b} \bar{M}. \tag{2.1.99}$$

В таком случае нормированная Эрмитова метрика $g_{\bar{a}b}/g_{\bar{1}1}$ обобщает метрику Замолодчикова на $\mathscr{M}$, если маргинальное подпространство в $\mathscr{M}$ является пространством деформаций суперконформной теории поля. В частности, ограничение этой метрики на пространство маргинальных деформаций в случае компактификации на многообразия Калаби-Яу равняется метрике специальной Кэлеровой геометрии.

В завершение, приведём формулу, которая представляет условия интегрируемости специальной геометрии через уравнения нулевой кривизны со спектральным параметром: То есть уравнения интегрируемости tt^*-геометрии записываются как условие исчезания тенора кривизны для следующего однопараметрического семейства связностей:

$$\begin{aligned} D_v^\lambda w &= D_v w - \lambda v \star w, \\ D_{\bar{v}}^\lambda w &= D_{\bar{v}} w - \lambda^{-1} \overline{v \star \overline{w}}, \end{aligned} \tag{2.1.100}$$

где комплексное сопряжение задаётся формулой (2.1.97). Такие уравнения нулевой кривизны можно получить рассматривая определённые полу-БПС-браны в суперсимметричных теориях [28], при этом матрица вещественной структуры совпадает с каноническим комплексным сопряжением в Гильбертовом пространстве теории.

2.2 Теории Ландау-Гинзбурга

Важный класс двумерных конформных N=(2,2) суперсимметричных теорий получается из суперсимметричных теорий Ландау-Гинзбурга. С одной стороны, этот класс теорий достаточно хорошо изучен и в теориях такого типа просто проводить вычисления (с киральными кольцами). Теории Ландау-Гинзбурга характериузются голоморфной функцией, называемой суперпотенциалом. Математически, изучение вакуумов теорий Ландау-Гинзбурга сводится к изучению теории особенностей, более точно, к изучению особенности задаваемой голоморфным суперпотенциалом. С другой же стороны теории такого типа задают достаточно обширный класс двумерных N=2 суперсимметричных теорий, а также для них имеются различные дуальности. Основные результаты этой работы основаны как раз на использовании дуальностей типа Ландау-Гинзбург/Калаби-Яу, которые связывают теории ЛГ и нелинейные суперсимметричные сигма-модели в многообразия Калаби-Яу. В классе теорий ЛГ с заданным квазиоднродным суперпотенциалом имеется N=2 суперсимметричная конформная теория поля. Вакуумы теории Ландау-Гинзбурга соответствуют киральным полям в конформной теории поля. В теории суперструн вертексные операторы безмассовых частиц выживающих после ГСО проекции строятся из специальных киральных полей конформной теории поля. В силу этого изучение киральных колец в теориях Ландау-Гинзбурга (более точно в *орбифолдах* ЛГ) позволяет вычислить безмассовый сектор теории суперструн построенной с помощью теории ЛГ или связанной с ней нелинейной сигма моделью. Помимо физических аргументов соответствие геометрии теорий ЛГ и многообразий Калаби-Яу специального типа можно установить математически.

В этом разделе мы напомним основные важные для нас свойства моделей Ландау-Гинзбурга, а потом сосредоточимся на формулировке математических следствий теории.

N=2 суперсимметричная алгебра в двух измерениях состоит из операторов энергии, импульса и момента H, P, M и четырёх суперзарядов $Q_\pm, \overline{Q_\pm}$, где $Q_\pm, \bar{Q}_\pm \in K_\Sigma^{1/2}$ являются правыми и левыми фермионами на двумерной поверхности Σ (K_Σ - каноническое расслоение на Σ, его сечениями являются голоморфные дифференциалы) с нетривиальными коммутационными соотношениями суперзарядов:

$$\begin{aligned} &\{Q_\pm, \overline{Q_\pm}\} = H \pm P = \partial_\pm, \\ &\{\overline{Q_+}, \overline{Q_-}\} = Z, \\ &\{\overline{Q_-}, \overline{Q_+}\} = \tilde{Z}, \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

где $Z, \tilde{Z}$ и их комплексно сопряжённые являются центральными зарядами. Теория может быть сформулирована на языке суперполей. Для этого на мировом листе вводятся четыре дополнительные антикоммутирующие координаты $\theta^\pm, \overline{\theta^\pm}$ и суперзаряды в формализме суперпространства:

$$\begin{aligned} Q_\pm &= \frac{\partial}{\partial\theta^\pm} + i\overline{\theta^\pm}\partial_\pm, \\ \overline{Q_\pm} &= \frac{\partial}{\partial\overline{\theta^\pm}} - i\theta^\pm\partial_\pm. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Их антикоммутатор даёт оператор импульса

$$\{Q_\pm, \overline{Q_\pm}\} = -2i\partial_\pm. \tag{2.2.3}$$

Тогда легко видеть, что с ними коммутируют следующие операторы суперпроизводных

$$\begin{aligned} D_\pm &= \frac{\partial}{\partial\theta^\pm} - i\overline{\theta^\pm}\partial_\pm, \\ \overline{D_\pm} &= \frac{\partial}{\partial\overline{\theta^\pm}} + i\theta^\pm\partial_\pm. \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Эти операторы позволяют удобно записать неприводимые представления N=2 алгебры. В частности, киральные и антикиральные поля определяются условиями “супер(анти)голоморфности” [1]

$$\begin{aligned} \overline{D_\pm}\Phi_i &= 0, \\ D_\pm\overline{\Phi_i} &= 0. \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

[1] в литературе встречается другое соглашение для киральных полей: $D^+\Phi = \overline{D^+}\Phi = 0$

Действие $N = (2,2)$ суперсимметричной теории Ландау-Гинзбурга строится из киральных и антикиральных полей:

$$S_{LG} = \int_{S^+S^-\Sigma} \mathrm{d}^2z\, \mathrm{d}^2\theta \overline{\mathrm{d}^2\theta}\ K(X^i, \overline{X^j}) + \int_{S^+\Sigma} \mathrm{d}^2z\, \mathrm{d}^2\theta\, W(X^i) + \text{э.с.}, \qquad (2.2.6)$$

где $K(x^i, \overline{x^j})$ - вещественная функцияя от $x^i, \overline{x^j}$ имеющая смысл Кэлерова потенциала метрики таргет-пространства с координатами ϕ, а $W(x^i)$ - голоморфная функция своих аргументов, называемая суперпотенциалом. Мы будем требовать, чтобы W являлась квазиоднородным многочленом

$$W(\lambda^{q_i} x^i) = \lambda W(x^i), \qquad (2.2.7)$$

(тогда в классе теорий с таким суперпотенциалом будет суперконформная теория поля) и задавала изолированную особую точку, то есть

$$\partial_1 W = \cdots = \partial_n W = 0 \equiv \phi = 0. \qquad (2.2.8)$$

Первый член действия (2.2.6), где интегрирование идёт по всем четырём суперкоординатам, назвается D-членом, а второй соответственно F-членом. Теоремы о неперенормируемости N=2 суперсимметричных теорий утверждают, что при движении вдоль потока ренормгруппы F-член не получает поправок. Это означает, что в пределе из теории с F-членом задаваемым W получится конформная теория поля с некоторым D-членом и тем же F-членом.

Если разложить киральные поля по компонентным:

$$X^i(z) = \phi(x^\pm) + \theta^\alpha \psi_\alpha(x^\pm) + \theta^2 F(y^\pm), \qquad (2.2.9)$$

то Лагранжиан действия (2.2.6) после интегрирования по нечётным координатам и использования уравнений движения для вспомогательного поля F равняется $L_{kin} + L_W$, где

$$\begin{aligned} L_{kin} &= -g_{i\bar{j}} \partial^\mu \phi^i \partial_\mu \overline{\phi^j} + i g_{i\bar{j}} \overline{\psi^j}_- (D_0 + D_1) \psi^i_- + \\ &+ i g_{i\bar{j}} \overline{\psi^j}_+ (D_0 - D_1) \psi^i_+ + R_{i\bar{j}k\bar{l}} \psi^i_+ \psi^k_- \overline{\psi^j_-}\,\overline{\psi^l_+}. \\ L_W &= -\frac{1}{4} g^{\bar{i}j}\, \overline{\partial_i W} \partial_j W - \frac{1}{2} D_i \partial_j W \psi^i_+ \psi^j_i - \frac{1}{2} \overline{D_i \partial_j W}\, \overline{\psi^i_-}\,\overline{\psi^j_+}. \end{aligned} \qquad (2.2.10)$$

В частности, скалярный потенциал имеет вид $|\mathrm{d}W|^2$, то есть классический вакуум - $\phi^i = 0$ в случае потенциала с изолированной особой точкой.

Сконцентрируемся вновь на киральных полях и их корреляционных функциях. Напомним, что киральные поля удовлетворяют уравнению "суперголоморфности" (2.2.5). В силу тождества Лейбница, произведение киральных полей также является киральным, то есть они образуют кольцо, которое называется киральным кольцом $\mathcal{R}$.

Уравнения движения теории после интегрирования по $\overline{\theta^{\pm}}$ в суперпространстве имеют вид

$$\partial_i W(X_j) = -\overline{D^- D^+} \partial_i K(X, \bar{X}), \tag{2.2.11}$$

то есть производные суперпотенциала являются потомками киральных полей. Поля Φ_i являются киральными по определению, как и их произведения. Киральное кольцо, таким образом, оказывается изоморфным факторкольцу полиномов от Φ_i по идеалу порождённому уравнениями движения $\partial_i W(X_j)$.

$$\mathcal{R} = \frac{\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]}{(\partial_1 W, \cdots, \partial_n W)}. \tag{2.2.12}$$

В математической литературе киральное кольцо $\mathcal{R}$ называется *кольцом Милнора* или *кольцом Якоби*. В силу квазиоднородности суперпотенциала, как говорилось раньше, в теории с определённым D-членом имеется конформная симметрия, в частности имеются правый и левый U(1)-токи. Каждое киральное поле имеет хорошо определённый U(1) заряд или вес. В частности, заряд полей X_i пропорционален q_i, определённым в (2.2.7). Число элементов кирального кольца можно подсчитать с помощью полинома Пуанкаре:

$$P(t^{1/d}) = \mathrm{Tr}_{chir} t^{J_0} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - t^{1-q_i}}{1 - t^{q_i}}, \tag{2.2.13}$$

где J_0 - оператор U(1)-заряда, а d - наименьший общий знаменатель всех q_i. По определению, коэффициент при t^q этого полинома равен числу киральных полей заряда q. Знаменатель в формуле (2.2.13) считает все полиномы $X_1^{k_1} \cdot X_n^{k_n}$, а числитель вычитает из общего числа полиномы вида $X_1^{k_1} \cdot X_n^{k_n} \partial_i W$, поскольку $\partial_i W$ - это киральное поле (тривиальное) заряда $1 - q_i$.

В силу того, что особенность задаваемая функцией W изолированная, все производные $\partial_i W$ независимы, то есть в формуле (2.2.13) все полиномы вычитаются ровно один раз. В противном случае, в формулу пришлось бы добавить дополнительные числители и знаменатели.

Старший член $P(t^{1/d})$ равен $t^{c/3}$, где

$$c = 3 \sum_{i=1}^{n} (1 - 2q_i) \tag{2.2.14}$$

центральный заряд соответствующей конформной теории поля. Это значит, что в кольце Милнора существует ровно один элемент максимального веса, равного $c/3$. Этот элемент можно записать явной формулой:

$$\Phi_\rho := \mathrm{Hess} W = \det(\partial_i \partial_j W). \tag{2.2.15}$$

Более того, имеется симметрия в коэффициентах $P(t)$, то есть количество киральных полей с зарядом q равняется количеству полей с зарядом $c/3 - q$.

Это является отражением наличия невырожденного (топологического) спаривания с зарядом $c/3$.

Введём обозначение для структурных констант в киральном кольце C_{ij}^k, то есть

$$\Phi_i \cdot \Phi_j = C_{ij}^k \Phi_k + \overline{D^- D^+} \chi. \tag{2.2.16}$$

Проекцию на основные состояния можно сделать с помощью топологического твиста [90, 92].

Топологический твист Этот твист можно сделать в любой $N = 2$ теории в двумерном пространстве (и не только). В теории имеются два суперзаряда $Q^+ = Q_R^+ + Q_L^-$ и $Q^- = Q_R^- + Q_L^+$ Коммутационные соотношения суперзарядов:

$$\begin{aligned} (Q_+)^2 = (Q_-)^2 = 0, \\ \{Q_+, Q_-\} = H. \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

Идея топологического твиста заключается в том, чтобы сдвинуть спины полей Q_+, Q_- на одну вторую так, что Q_+ станет скаляром, а Q_- 1-формой, после чего объявить оператор Q_+ БРСТ оператором, то есть среди физических полей оставить только Q_+ - когомологии

$$Q_+ \Phi = 0, \quad \Phi \sim \Phi + Q_+ \chi. \tag{2.2.18}$$

Из каждого класса можно выбрать по одному гармоническому представителю, фиксированному условием $Q_- \Phi = 0$. Тогда киральное кольцо окажется в точности кольцом операторных произведений операторов топологической теории, набор физических состояний изоморфен киральному кольцу:

$$|i\rangle = \Phi_i |0\rangle + Q_+(\cdots). \tag{2.2.19}$$

Гамильтониан как и тензор энергии-импульса является Q_+-точным, то есть корреляционные функции топологической теории не зависят от метрики на поверхности и положений операторов. В частности, топологически твистованную теорию можно рассматривать на любой поверхности, а вычисления проводить в плоском бэкграунде.

У метрики существует режим, в котором теория становится эффективно одномерной [27]. В этом режиме можно вычислить двухточечную функцию топологической теории. Она оказывается равной

$$\eta_{ij} = \langle i | j \rangle = \mathrm{Res} \frac{\Phi_i(x)\, \Phi_j(x)\, \mathrm{d}^n x}{\partial_1 W \cdots \partial_n W}, \tag{2.2.20}$$

где символ вычета означает вычет Гротендика - контурный интеграл вокруг гиперповерхностей $\partial_i W = 0$.

Очевидно, что кольцо Милнора $\mathcal{R}$ снабжённое метрикой η_{ij} является Фробениусовой алгеброй.

Теорию можно деформировать произвольными киральными полями:

$$\mathcal{L}_{lg} \to \mathcal{L}_{lg} + \sum_i t^i \int \mathrm{d}^2\theta\, \Phi_i + \text{э.с.}, \tag{2.2.21}$$

где параметры t^i определяют точку на пространстве деформаций теории $\mathscr{M}$. Такие деформации определяют деформированный суперпотенциал $W(x,t)$ такой, что $W(x,0) = W(x)$. В дальнейшем мы будем обозначать недеформированный суперпотенциал $W(x,0) := W_0(x) = W_0$, а через W будем обозначать деформированный потенциал.

В таком случае можно рассмотреть расслоение физических состояний топологической теории $H \to \mathscr{M}$. Базис киральных полей можно отождествить с касательным пространством $\mathscr{M}$ по правилу

$$\frac{\partial}{\partial t^i} \to \frac{\partial}{\partial t^i} W(x,t) =: \partial_i W. \tag{2.2.22}$$

В общем случае, топологическая метрика теории будет плоской и выражаться через так называемую *примитивную форму* $\zeta = \zeta(x,t)\mathrm{d}^n x$:

$$\eta_{ij} = \mathrm{Res} \frac{\Phi_i(x)\, \Phi_j(x)\, \zeta^2(x,t)\mathrm{d}^n x}{\partial_1 W \cdots \partial_n W}. \tag{2.2.23}$$

Нетривиальная форма метрики в базисе $\Phi_i(x)$ связана с тем, что при $t \neq 0$ эти поля в общем случае не являются киральными, а их гравитационными потомками, а метрика η_{ij} в произвольном базисе неправильно преобразуется под действием калибровочного преобразования $\alpha \to \alpha + \partial_i \chi + \partial_i W\, \chi$ (проявление голоморфной аномалии [71, 72]).

Пространство деформаций $\mathscr{M}$ вместе с умножнием касательном пространстве в каждой точке, а также с метрикой η_{ij} является Фробениусовым многообразием, то есть выполняется условие интегрируемости:

$$[\nabla_i - z^{-1} C_i, \nabla_j - z^{-1} C_j] = 0, \tag{2.2.24}$$

где ∇_i - связность Леви-Чивиты метрики η_{ij}.

tt^* геометрия теорий Ландау-Гинзбурга Можно получить ещё одно условие интегрируемости перед топологическим твистом. А именно, в теории имеется связность *Берри* [29]. Эта связность вводится на пространстве деформаций N=2 теории до топологического твиста.

$$\mathcal{L}_{lg} \to \mathcal{L}_{lg} + \sum_i t^i \int \mathrm{d}^2\theta\, \Phi_i + \sum_i \overline{t^i} \int \mathrm{d}^2\overline{\theta}\, \overline{\Phi_i}, \tag{2.2.25}$$

где Φ_i по прежнему являются киральными полями. При этом как и в случае топологического твиста имеется деформированный потенциал $W(x,t)$. Однако, если считать t^i и $\overline{t^i}$ независимыми (нарушая унитарность теории), то будут иметься два суперпотенциала. Тогда связность Берри определяется вариацией вакуумного расслоения при изменении t^i. Топологически твистованная теория даёт естественный "голоморфный" базис в $H\ :\ |i\rangle$, задаваемый уравнениями $Q_R^+|i\rangle = Q_R^-|i\rangle = 0$.

$$\partial_i|j\rangle = A_{ij}^k|k\rangle. \tag{2.2.26}$$

Аналогичное уравнение есть для антиголоморфных параметров, то есть для базиса $|\bar{i}\rangle$ пространства H возникающего из антитопологического твиста, или же $Q_L^+|i\rangle = Q_L^-|i\rangle = 0$.

$$\overline{\partial_i}|\bar{j}\rangle = A_{\overline{ij}}^{\bar{k}}|\bar{k}\rangle. \tag{2.2.27}$$

Между голоморфным и антиголоморфными базисами вакуумного расслоения имеется матрица перехода $|\bar{i}\rangle = M_i^{\bar{j}}(t,\bar{t})|j\rangle$. Эта матрица нетривиально зависит от параметров деформации теории. Эта матрица называется матрицей *вещественной структуры* на H. Поскольку она выражает комплексное сопряжение, имеем $M_{\bar{j}}^{i} M_k^{\bar{j}} = \delta_k^i$.

Естественное Эрмитово спаривание на H выражается через топологическое спаривание и матрицу вещественной структуры M:

$$G_{i\bar{j}} := \langle i|\bar{j}\rangle = M_{\bar{j}}^k\langle i|k\rangle = M_{\bar{j}}^k\eta_{ik}. \tag{2.2.28}$$

Связность Берри также интегрируема, условие интегрируемости переписывается в виде

$$[\nabla_i + \overline{\nabla_i} + z^{-1}C_i + z\overline{C_i}, \nabla_j + \overline{\nabla_j} + z^{-1}C_j + z\overline{C_j}], \tag{2.2.29}$$

где $\nabla_i + \overline{\nabla_i}$ является связностью Леви-Чивиты для метрики $G_{i\bar{j}}$. Последнее уравнение является в точности условием интегрируемости tt^*-геометрии (2.1.100) при замене $z \to -\lambda$. При этом матрица вещественной структуры естественно отожденствляется с матрицей (2.1.97), а связность D_a оказывается проекцией связности Берри на основные состояния.

Вдобавок к уже известным, условия интегрируемости расписываются по степеням z с результатом:

$$\begin{aligned} [\nabla_i, \overline{\nabla_j}] &= 0, \\ [\nabla_i, \overline{C_j}] &= 0, \\ [\nabla_i, \overline{\nabla_j}] &= -[C_i, \overline{C_j}]. \end{aligned} \tag{2.2.30}$$

Эти уравнения называются tt^* уравнениями [29], подчёркивая голоморфный-антиголоморфный характер уравнений. Если переписать ∇ через $g_{i\bar{j}}$, а $M_{\bar{j}}^{i} = \eta^{ij}g_{j\bar{k}}$, то tt^* уравнения являются уравнениями на метрику $g_{i\bar{j}}$. В общем случае эти уравнения очень сложны и нелинейны, определяя интегрируемые системы. Даже для случая $W(x) = x^{n+1}$ соответствующие tt^* уравнения являются уравнениями двумеизованной A_n цепочки Тоды.

Как мы покажем ниже, специальная Кэлерова геометрия получается из простого частного случая tt^*.

2.3 Вычисление специальной Кэлеровой геометрии для нелинейных сигма моделей

2.3.1 Трёхмерная квинтика и её зеркальный образ

В этом разделе мы детально изучим пример вычисления специальной Кэлеровой геометрии для классического примера. Вычисление специальной геометрии на одномерном пространстве модулей зеркальной квинтики было сделано в работе [23] почти 30 лет назад и явилось первым проявлением успешности зеркальной симметрии в исчислительной геометрии. Напротив, вычисление специальной геометрии на пространстве модулей самой квинтики, которое имеет размерность 101, было впервые сделано в работе автора совместно с А. Белавиным в прошлом году. На этом примере мы объясним силу нашего метода, а именно применении дуальности нелинейной сигма-модели квинтики и орбифолда Ландау-Гинзбурга соответствующего суперпотенциала.

Рассмотим четырёхмерное проективное пространство, то есть факторпространство $(\mathbb{C}^5\backslash\{0\})/\mathbb{C}^*$:

$$\mathbb{P}^4 = \{x_1, \cdots, x_5 \in \mathbb{C}^5 \mid \prod_{i\leq 5} x_i \neq 0,\ x_i \sim \lambda x_i,\ \lambda \neq 0\}. \tag{2.3.1}$$

Рассмотрим также комплексную гиперповерхность $\mathcal{Q}_0$ (трёхмерную) в $\mathbb{P}^4$ заданную уравнением $W_0(x) = 0$,

$$W_0(x) = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5. \tag{2.3.2}$$

Этот полином однородный, $W_0(\lambda x_i) = \lambda^5 W_0(x_i)$, то есть его множество нулей не зависит от выбора калибровки. Частные производные $\partial_i W_0$ не зануляются все вместе при $x_i \neq 0$, то есть эта гиперповерхность гладкая. Одна Кэлерова форма на $\mathcal{Q}$, индуцируется Кэлеровой формой Фубини-Штуди на $\mathbb{P}^4$ вместе с Кэлеровой метрикой. Заметим, что полученная таким образом метрика НЕ является Риччи-плоской. Согластно теореме Лефшеца $H^i(\mathcal{Q}_0) = H^i(\mathbb{P}^4)$ при $i \leq 2$. В частности пространство Кэлеровых модулей одномерно $h^{1,1} = 1$.

Покажем, что $\mathcal{Q}_0$ является многообразием Калаби-Яу. Для этого предъявим нигде не зануляющуюся 3-форму:

$$\Omega_0 := \epsilon^{ijklm} \frac{x_i \mathrm{d}x_j \mathrm{d}x_k \mathrm{d}x_l}{\partial W_0/\partial x_m}. \tag{2.3.3}$$

Во-первых, эта форма степени однородности 0, то есть является хорошо определённой формой на $\mathbb{P}^4$. Действительно, хотя бы один из $x_i \neq 0$, для определённости $x_5 \neq 0$. Выберем x_1, x_2, x_3 в качестве локальных координат на $\mathcal{Q}_0$.

Тогда

$$\Omega_0 = \frac{x_5 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3}{\partial W_0/\partial x_4}. \tag{2.3.4}$$

Эта форма могла бы иметь полюс при $\partial W_0/\partial x_4 = 0$, но по теореме о неявной функции в этой точке x_1, x_2, x_3 не являются системой координат, то есть $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$ имеет ноль, который сокращает ноль знаменателя. Таким образом Ω_0 - искомая голоморфная 3-форма объёма, то есть $\mathcal{Q}_0$ является многообразием Калаби-Яу.

Более концептуальный способ показать, что Ω_0 является формой объёма это заметить, что она является вычетом домножив и поделив на $\mathrm{d}W_0$:

$$\oint_{W=0} \epsilon^{ijklm} \frac{x_i \mathrm{d}x_j \mathrm{d}x_k \mathrm{d}x_l \mathrm{d}x_m}{W_0(x)} = \oint_{W=0} \frac{\mathrm{d}W_0}{W_0} \epsilon^{ijklm} \frac{x_i \mathrm{d}x_j \mathrm{d}x_k \mathrm{d}x_l}{\mathrm{d}W_0(x)/\mathrm{d}x_m} = \Omega_0. \tag{2.3.5}$$

Это означает, что интеграл 3-формы Ω_0 по трёхмерному циклу γ равен интегралу от 4-формы по трубчатой окрестности $T(\gamma)$ в плоскости ортогональной поверхности $W = 0$:

$$\int_\gamma \frac{x_5 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3}{\partial W_0/\partial x_4} = \int_{T(\gamma)} \frac{x_5 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_4}{W_0(x)}. \tag{2.3.6}$$

Последний интеграл можно упростить ещё сведя его к интегралу по пятимерному (вещественному) циклу в $\mathbb{C}^5$. Для этого используем то, что в силу однородности интеграл (2.3.6) не зависит от x_5. Тогда можно вставить под интеграл единицу в виде $\oint \mathrm{d}x_5/x_5$ (мы игнорируем факторы $2\pi i$ возникащие при взятии вычетов):

$$\int_{T(\gamma)} \frac{x_5 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_4}{W_0(x)} = \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_4 \mathrm{d}x_5}{W_0(x)}, \tag{2.3.7}$$

где $\Gamma \subset \mathbb{C}^5$ - пятимерный цикл, являющийся трубчатой окрестностью (подъёмом в расслоении Хопфа) четырёхмерного цикла $T(\gamma)$. То есть каждой точке цикла $T(\gamma)$ соответствует окружность $|x_5| = 1$ в цикле Γ.

Ещё более концептуальный способ показать, что $\mathcal{Q}_0$ является Калаби-Яу заключается в том, чтобы заметить, что касательное пространство к $\mathbb{P}^4$ на $W_0 = 0$ разбивается в касательное пространство к $\mathcal{Q}_0$ и нормальное расслоение к $\mathcal{Q}_0$. В нормальном расслоении ллокальной координатой является значение полинома W_0, то есть полинома пятой степени. Значит, нормальное расслоение задаётся полиномами пятой степени от однородных координат, или $\mathcal{O}(5) \to \mathbb{P}^4$. Математически это разложение выражается в виде точной последовательности расслоений:

$$0 \to T\mathcal{Q}_0 \to T\mathbb{P}^4|_{\mathcal{Q}_0} \to \mathcal{O}(5)|_{\mathcal{Q}_0} \to 0 \tag{2.3.8}$$

В частности, полный класс Черна квинтики $\mathcal{Q}_0$ выражается через касательный класс проективного пространства $c(\mathbb{P}^4) = (1+H)^5$, где H - Кэлеров класс проекивного пространства Пуанкаре дуальный к гиперплоскости, и тавтологического расслоения $c(\mathcal{O}(5)) = (1+H)^5|_{H^2=0} = (1+5H)$:

$$\begin{aligned} c(T\mathcal{Q}_0) &= 1 + c_1\,H + c_2\,H^2 + c_3\,H^3, \quad H^4|_{Q_0} = 0, \\ c(T\mathcal{Q}_0) &= \frac{(1+H)^5}{1+5H} = 1 + 10H^2 - 40H^3. \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

В частности, первый класс Черна равен нулю. По формуле Эйлера находим Эйлерову характеристику в виде

$$\chi(\mathcal{Q}_0) = \int_{\mathcal{Q}_0} c_3(\mathcal{Q}_0) = \int_{\mathbb{P}^4} c_3(\mathcal{Q}_0)\,(5H) = -\int_{\mathbb{P}^4} 200H^4 = -200. \tag{2.3.10}$$

Для трифолдов Калаби-Яу с $b^1 = 0$ из явного вида ромба Ходжа Эйлерова характеристика равна $2h^{1,1} - 2h^{2,1}$. Для квинтики получаем $h^{2,1} = 101$.

Все деформации комлексной структуры можно получить явно в виде полиномиальных деформаций уравнения $W_0(x) = 0$. Рассмотрим однородную полиномиальную деформацию $W_0(x)$ общего вида:

$$W_0(x) + \sum_{s_1+\cdots+s_5=5} \phi_{s_1\cdots s_5} x_1^{s_1} \cdots x_5^{s_5}, \tag{2.3.11}$$

Такой полином в силу однородности также задаёт гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$. Для общего значения параметров $\phi_{s_1\cdots s_5}$ эта гиперповерхность $\mathcal{Q}_\phi$ также является гладкой. Все гладкие гиперповерхности являются деформациями $\mathcal{Q}_0$, а потому изоморфными вещественными многообразиями. При этом, как обсуждалось в главе 2, различные гиперповерхности в общем случае не являются биголоморфными друг другу (все изоморфизмы многообразий являются вещественными), то есть обладают различной комплексной структурой. Семейство таких гиперповерхностей над пространством параметров удобно использовать для описания геометрии пространства модулей комплексных структур.

Для начала рассмотрим, когда $\mathcal{Q}_{\phi_1} \simeq \mathcal{Q}_{\phi_2}$. Всего имеется 126 однородных мономов степени 5:

$$\begin{aligned} x_i^5 - 5,\ x_i^4 x_j - 20,\ x_i^3 x_j^2 - 20,\ x_i^3 x_j x_k - 30,\ x_i^2 x_j^2 x_k - 30,& \\ x_i^2 x_j x_k x_l - 20,\ x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 - 1.& \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

На $\mathbb{P}^4$ действует группа линейных изометрий $PGL(5)$, которая вместе с растяжениями проективного пространства образуют группу $GL(5)$, действующую на пространстве полиномов пятой степени заменами координат и изоморфизмами на соответствующих многообразиях. В силу этого для изучения геометрии пространства модулей необходимо профакторизовать пространство параметров по $GL(5)$. Рассматривая пространство параметров, как деформации

W_0 естественно фиксировать $\phi_{50000} = 1, \cdots, \phi_{00005} = 1$ и рассмотреть деформации, которые меняют комплексную структуру в первом порядке. Для этого надо разложить координатные преобразования в первом порядке:

$$W_0(x + \delta x) = W_0(x) + \sum_i \partial_i W_0(x) \delta x_i + O(\delta^2 x). \tag{2.3.13}$$

Это означает, что мономы лежащие в идеале Якоби в первом порядке являются координатными преобразованиями. Идеал Якоби для $W_0(x)$ порождён мономами $\partial_i W_0(x) = 5x_i^4$, Введём обозначение для мономов: $(s_1, \cdots, s_5) := x_1^s \cdots x_5^{s_5}$. В этих обозначениях среди нетривиальных деформаций остаются

$$\begin{aligned} (1,1,1,1,1) - 1,\ (2,1,1,1,0) - 20,\ (2,2,1,0,0) - 30, \\ (3,1,1,0,0) - 30,\ (3,2,0,0,0) - 20. \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

Всего 101 нетривиальная деформация. Пронумеруем все деформациями индексом s (без нижнего индекса), а соответствующий моном обозначим $e_s := x_1^{s_1} \cdots x_5^{s_5}$ и определим деформационное семейство

$$W(x, \phi) := W_0(x) + \sum_{s=1}^{101} \phi_s e_s. \tag{2.3.15}$$

Заметим, что 101 это в точности число комплексных деформаций квинтики $h^{2,1}$, посчитанное выше. Это значит, что почти все деформации комплексной структуры на квинтике реализуются полиномиальными деформациями задающего её уравнения в $\mathbb{P}^4$, то есть членами семейства (2.3.15). Почти все означает то, что семейство (2.3.15) реализует множество полной меры среди всех комплексных структур на квинтике.

Назовём $\tilde{\mathscr{M}}$ пространство деформаций ϕ_s. Среди членов семейства (2.3.15) всё ещё есть изоморфные слои, то есть изоморфные комплексные многообразия. Более точно, на пространстве параметров ϕ_s действует конечная группа, преобразования которой являются тривиальными на пространстве модулей $\mathscr{M}$.

Уравнение $W_0(x)$ является обладает большой группой симметрий, так называемой *фазовой симметрией* Π_{W_0}. Фазовая симметрия, это преобразования растягивающие координаты на $\mathbb{C}^5$ и оставляющие полином $W_0(x)$ инвариантным, то есть для $g \in \Pi_{W_0}$ действующие как

$$g \cdot x_i = \lambda_i x_i,\ W_0(g \cdot x) = W_0(x). \tag{2.3.16}$$

Для квинтики это группа $\mathbb{Z}_5^5 = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^5$, действующая корнями пятой степени из 1 на каждой из координат. При этом в Π_{W_0} есть подгруппа $Q_{W_0} = \mathbb{Z}_5$ действующая диагонально. Эта подгруппа является подгруппой однородных растяжений проективного пространства и поэтому действует тривиально на $\mathbb{P}^4$. Она исторически называется группой *квантовой симметрии* [49] (не стоит путать это понятие с квантовыми группами). Факторгруппа $G_{W_0} = \Pi_{W_0}/Q_{W_0} \simeq \mathbb{Z}_5^4$, называемая группой геометрической симметрии, действует на $\mathcal{Q}_0$ нетривиальными автоморфизмами.

Любая деформация функции $W_0(x)$ из семейства $W(x,\phi)$ нарушает группу фазовой симметрии до её подгруппы, причём в случае деформации общего положения нарушенная подгруппа совпадает с группой квантовой симметрии Q_{W_0}, то есть у квинтики общего положения нет нетривиальных автоморфизмов. Можно доопределить действие группы фазовой симметрии на пространстве деформаций $\tilde{\mathscr{M}}$ так, что деформированный полином $W(x,\phi)$ будет инвариантен относительно расширенного действия. Пусть $\alpha = e^{2\pi i/5}$ означает примитивный корень из 1. Тогда для элемента группы $g \cdot x_i = \alpha^{n_i} x_i$ расширенное действие задаётся формулой

$$g \cdot \phi_s = \bar{\alpha}^{\sum_i n_i s_i} \phi_s \tag{2.3.17}$$

По построению, многообразия $\mathcal{Q}_\phi$ и $\mathcal{Q}_{g\cdot\phi}$ биголоморфны, явный биголоморфизм задаётся действием $x \to g \cdot x$. Значит настоящее пространство модулей является, как максимум, фактором $\mathscr{M} := \tilde{\mathscr{M}}/G_{W_0}$. Мы не будем обсуждать возможные конечные факторы $\mathscr{M}$. В пространстве $\mathscr{M}$ имеются комплексные подмногообразия, соответствующие вырожденным квинтикам. Вырожденные случаи интересны как специальные режимы теории струн, возможные переходы к другим топологически другим многообразиям и с других точке зрения. Ещё один интересный вопрос в изучении пространства модулей состоит в его компактификации, то есть в добавлении особых квинтик в качестве границы. Мы немного обсудим это вопрос в главе (3) в контексте линейных калибровочных сигма моделей.

Прежде чем обсуждать сложный случай 101-мерного пространства модулей квинтики, изучим в деталях комплексные модули зеркального образа квинтики $\check{\mathcal{Q}}$. Согласно конструкции Грина и Плессера, то есть исторически первой конструкции зеркальной симметрии, зеркальный образ квинтики задаётся её фактором по подгруппе фазовой симметрии Π_{W_0}.

Зеркальная квинтика получается из обычной фактором по максимальной подгруппе геометрической симметрии G_{W_0}, которая сохраняет голоморфную форму объёма Ω_0. Такая подгруппа называется максимальной допустимой подгруппой. Поскольку форма объёма записывается через вычет формы

$$\frac{\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_5}{W_0(x)}, \tag{2.3.18}$$

и группа фазовой симметрии сохраняет $W_0(x)$, максимальная допустимая группа должна сохранять $\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_5$, то есть сохранять деформацию $(1,1,1,1,1)$. Такой группой является $\mathbb{Z}_5^3$. В качестве порождающих элементов можно выбрать, например, $g_1 \ : \ x_1 \to \alpha x_1,\ x_5 \to \alpha^4 x_5,\ g_2 \ : \ x_2 \to \alpha x_3,\ x_5 \to \alpha^4 x_5,\ g_3 \ : \ x_3 \to \alpha x_3,\ x_5 \to \alpha^4 x_5,$. Из всего семейства $W(x,\phi)$ группа $\mathbb{Z}_5^3$

оставляет инвариантными только одну деформацию, как раз $(1,1,1,1,1)$:

$$W(x,\phi_1) := \sum_{i\le 5} x_i^5 + \phi_1 \prod_{i\le 5} x_i. \tag{2.3.19}$$

Это так называемое семейство Дворка. Действие группы имеет неподвижные точки и кривые, поэтому фактормногообразие $\check{\mathcal{Q}}_{\phi_1}$ имеет орбифолдные особенности. Чтобы получить гладкое многообразие, необходимо провести раздутия неподвижных точке и кривых. При раздутии добавляются новые циклы $H^{1,1}$ и в $H^{2,2}$. Можно подсчитать, что Эйлерова характеристика $\check{\mathcal{Q}}_{\phi_1}$ равна 200, то есть $h_{1,1} = 101$, как и должно быть для зеркального образа квинтики.

Поскольку при раздутиях точек и кривых трёхмерные (ко)гомологии остаются неизменными, для вычисления геометрии комплексных модулей зеркальной квинтики можно работать с фактомногообразием до разрешения особенностей (раздутия).

Фактор по конечной группе является "калибровочной теорией с конечной группой", то есть можно работать с фактормногообразием как с обычным, но рассматривая только $\mathbb{Z}_5^3$-инвариантные циклы/дифференциальные формы. Семейство (2.3.19) одномерно, поэтому достаточно просто для анализа. Как уже обсуждалось, поверхности, соответствующие ϕ_1 и $\alpha\phi_1$ изоморфны, то есть правильной локальной координатой на пространстве модулей является $-z^{-1} := \phi_1^5$ (степень -1 и знак являются соглашением). Таким образом, плоскость координаты ϕ_1 вместе с бесконечностью является фактором проективной прямой $\mathbb{P}^1$ по $\mathbb{Z}_5$. Такой фактор называется взвешенной проективной прямой $\mathbb{P}^1_{(1,5)}$.

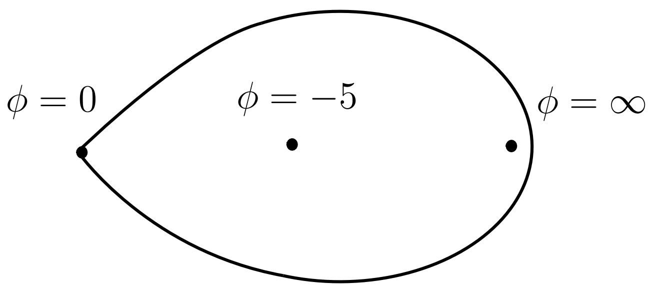


Рис. 2.1: Пространство комплексных модулей зеркальной квинтики $\mathbb{P}^1_{(1,5)}$

На этом пространстве модулей имеются три интересных точки - $\phi_1 = 0$, $\phi_1 = -5$, $\phi_1 = \infty$. Первая из них является *орбифолдной* точкой, то есть точкой, вокруг которой пространство модулей является локально фактором по конечной группе. Орбифолдные точки пространства модулей соответствуют гладким многообразиям с повышенной симметрией, то есть группой автоморфизмов. В случае квинтики $W_0 = \sum_i x_i^5$. Скачок в группе симметрий равен группе, по которой осуществляется фактор пространства модулей. Это общий феномен для пространств модулей, в частности, то же самое происходит при изучении модулей кривых.

Вторая точка, $\phi = \infty$ соответствует очень особому многообразию, а именно вырождению многообразия $\check{\mathcal{Q}}$ в объединение пяти гиперплоскостей $\prod_i x_i = 0 \simeq \bigsqcup_i x_i = 0$. Такие вырождения имеют очень специальный вид и называются точками большой комплексной структуры или точками максимальной унипотентной монодромии. При зеркальной симметрии они соответсвуют многообразиям большого объёма, где инстантонные поправки становятся незначительными.

Третья точка $\phi_1 = -5$ соответствует появлению конической сингулярности на многообразии. Действительно, уравнение на критические точки имеет вид

$$5x_i^4 + \phi_1 \prod_{j \neq i} x_j = 0 \tag{2.3.20}$$

и имеет решение $x_1 = \cdots = x_5 = const$ при $\phi_1 = -5$. На самом деле имеется 125 решений, то есть сингулярностей на префакторе, однако все они отождествляются группой $\mathbb{Z}_5^3$, так что на зеркальной квинтике имеется только одна сингулярность. Гессиан $x_1^3 \cdots x_5^3$ в этой точке не равен нулю, то есть сингулярность невырождена. Такие сингулярности называются коническими. Локально они имеют вид конуса над нетривиальным расслоением над S^3 слоями S^2 [25], где S^3 в точности исчезающий цикл в сингулярной точке. Такую сингулярность можно разрешить деформацией или раздутием, что даёт два различных многообразия. Теория струн даёт *гладкий* переход между этими многообразиями. Изучение конических особенностей важно для феноменологии, в частности, в сценариях мира на бране часть D-бран помещается как раз в такие сингуляности [32, 60]. Такие особенноси интересны и с математической точки зрения. В частности, если раздуть все 125 особенностей на префакторе, то получится так называемое многообразие Шоена [85], которое не имеет деформаций комплексной структуры. Периоды на таком многообразии оказываются таинственным образом связаны с периодами определённых модулярных форм, появление которых не связано напрямую с монодромией и является загадкой на настоящий момент.

Периоды зеркальной квинтики Вернёмся к изучению специальной Кэлеровой геометрии на зеркальной квинтики. Как мы выяснили, для неё $h^{2,1} = 1$, то есть размерность третьих когомологий $b^3 = 4$, в частности всего имеется 4 линейно независимых периода. Для начала, напомним классический способ, использовавшийся Канделасом с соавторами [23]. Для этого для начала вычисляются периоды в окрестности точки $\phi_1 = \infty$, то есть точки максимальной унипотентной монодромии. Период в окрестности такой точки можно вычислять разложением в степенной ряд по z:

$$\omega_0(z) := \frac{-z^{-1/5}}{(2\pi i)^5} \int_{T_5} \frac{\mathrm{d}^5 x}{\sum_i x_i^5 - z^{-1/5} \prod x_i}, \tag{2.3.21}$$

где нормировка на $z^{-1/5}/(2\pi i)^5$ введена для удобства, а цикл T_5 является пятимерным тором в $\mathbb{C}^5$, окружающим начало координат, или же произведением пяти окружностей вокруг начала координат в каждой из координатных плоскостей. Такой выбор контура продиктован следующим наблюдением: при маленьких z интеграл имеет вид

$$\omega_0(z) \sim \frac{1}{(2\pi i)^5} \int_{T_5} \frac{\mathrm{d}^5 x}{\prod x_i}, \tag{2.3.22}$$

и определённо сходится по пятимерному тору, являясь произведением одномерных вычетов. Тогда раскладывая (2.3.21) в ряд получаем

$$\omega_0(z) = \frac{1}{(2\pi i)^5} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{T_5} \frac{\mathrm{d}^5 x}{\prod x_i} \left(z^{1/5} \frac{\sum x_i^5}{\prod x_i} \right)^n, \tag{2.3.23}$$

При раскрытии скобки в каждом слагаемом получается полином Лорана. Только постоянный член этого полинома имеет ненулевой вычет. Такие слагаемые имеют вид

$$z^n \frac{(5n)!}{(n!)^5}. \tag{2.3.24}$$

подставляя это выражение в интеграл (2.3.23) получаем формулу для периода

$$\omega_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5n)!}{(n!)^5} z^n. \tag{2.3.25}$$

Используя формулу умножения Гаусса для гамма-функции

$$\Gamma(nx) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{1/2-nx} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{n}\right) \cdots \Gamma\left(x + \frac{n-1}{n}\right) \tag{2.3.26}$$

получаем ещё одно полезное представление для периода:

$$\omega_0(z) = (2\pi)^2 5^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{5}\right)\Gamma\left(n+\frac{2}{5}\right)\Gamma\left(n+\frac{3}{5}\right)\Gamma\left(n+\frac{4}{5}\right)}{\Gamma(n+1)^3 n!} \left(z/5^5\right)^n. \tag{2.3.27}$$

Из этого представления явно видно, что $\omega_0(z)$ является обобщённой гипергеометрической функцией

$$\omega_0(z) = (2\pi)^2 5^{1/2} {}_4F_3 \left(\begin{matrix} \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \\ 1, 1, 1 \end{matrix} ; z/5^5 \right). \tag{2.3.28}$$

Эта функция является сбалансированной гипергеометрической функцией, то есть сумма аргументов числителей равна сумме аргументов знаменателей + 1, и удовлетворяет гипергеометрическому уравнению четвёртой степени

$$\left[\theta^4 - \frac{z}{5^5}\left(\theta - \frac{1}{5}\right)\left(\theta - \frac{2}{5}\right)\left(\theta - \frac{3}{5}\right)\left(\theta - \frac{4}{5}\right)\right]\omega_0(z) = 0, \tag{2.3.29}$$

где $\theta = z\mathrm{d}/\mathrm{d}z$. Остальные три периода также являются решением того же самого дифференциального уравнения. Это является общим случаем для периодов на многообразиях Калаби-Яу. Периоды голоморфных (мероморфных) форм на семействах алгебраических многообразий удовлетворяют дифференциальным уравнениям очень специального типа, так называемым уравнениям Пикара-Фукса [66]. Самый простой пример - обычное гипергеометрическое уравнение с параметрами $\pm 1/2$ для эллиптических интегралов (заметим, что эллиптическая кривая - одномерный пример многообразия Калаби-Яу).

Остальные четыре периода несложно найти явно в этом случае. Для этого можно воспользоваться методом Фробениуса для нахождения решений дифференциального уравнения.

В случае уравнения (2.3.29) имеется четыре решения, при этом все индексы в точке $z = 0$ равны нулю, то есть решения начинаются с

$$\begin{aligned} &\omega_0(z) = 1 + \cdots, \ \omega_1(z) = \omega_0(z)\log z + \cdots, \\ &\omega_2(z) = \omega_0(z)\log^2 z + \cdots, \ \omega_3(z) = \omega_0(z)\log^3 z + \cdots. \end{aligned} \tag{2.3.30}$$

Такие точки называются точками максимальной унипотентной монодромии, поскольку матрица монодромии сопряжена с Жордановой клеткой с собственным значением 1.

$$\omega_i(z) \to \omega_i(z) + \omega_{i-1}(z) + \cdots. \tag{2.3.31}$$

Согласно методу Фробениуса периоды можно найти из следующей производящей функции, которая получается из периода $\omega_0(z)$:

$$\begin{aligned} \omega(z,H) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(5n+5H+1)}{\Gamma(n+H+1)^5} z^{n+H}|_{H^4=0} = \\ &= \omega_0(z) + \tilde{\omega}_1(z)H + \frac{1}{2}\tilde{\omega}_2(z)H^2 + \frac{1}{6}\tilde{\omega}_3(z)H^3. \end{aligned} \tag{2.3.32}$$

Периоды с тильдой получены методом Фробениуса, а потому не соответствуют интегралам по настоящим циклам, являясь вместо этого комплексной линейной комбинацией целочисленных периодов. Функция $\omega(z,H)$ непосредственно связана с так называемой J-функцией Гивенталя, если под H понимать Кэлеров класс квинтики (не зеркальной).

$$\tilde{\omega}_k(z) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f_i(z) \log^{k-i} z, \tag{2.3.33}$$

где

$$f_i(z) = \sum_{n\geq 0} z^n \frac{\partial^i}{\partial H^i} \left(\frac{\Gamma(5n+5H+1)}{\Gamma(n+H+1)^5}|_{H=0} \right). \tag{2.3.34}$$

Производная гамма-функции берётся с импользованием мультигамма функций $\psi^{(0)}(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$, $\psi^{(m)}(z) = \partial^m/\partial z^m \psi(z)$ с результатом

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \sum_n 5\Phi(0) \frac{\Gamma(5n+1)}{\Gamma(n+1)^5} z^n, \\ f_2(z) &= \sum_n (5\Phi'(0) + 25\Phi(0)^2) \frac{\Gamma(5n+1)}{\Gamma(n+1)^5} z^n, \\ f_3(z) &= \sum_n (5\Phi''(0) + 75\Phi(0)'\Phi(0) + 125\Phi(0)^3) \frac{\Gamma(5n+1)}{\Gamma(n+1)^5} z^n, \end{aligned} \tag{2.3.35}$$

где введена функция

$$\begin{aligned} \Phi(H) = \Phi_n(H) =& 5(\psi(5n+5H+1) - \psi(n+H+1)) - \\ &- 5(\psi(5H+1) - \psi(H+1)) = \\ &= 5\sum_{m=1}^{5n} \frac{1}{m+5H} - 5\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m+H}. \end{aligned} \tag{2.3.36}$$

Для того, чтобы найти ненормированные константы Юкавы этих данных оказывается достаточно, однако, чтобы найти специальную геометрию на пространстве модулей необходимо найти симплектический базис периодов, то есть найти базис целочисленных циклов, в котором матрица пересечений является симплектической единицей (2.1.41).

Классическим способом нахождения периодов в симплектическом базисе является аналитическое продолжение периода $\omega_0(z)$, использование монодромии, чтобы получить три оставшихся периода, а затем подробное исследование поведения периодов при монодромии, чтобы получить достаточно связей, чтобы вычислить матрицу монодромии. Аналитическое продолжение периода достигается с помощью интеграла типа Меллина-Барнса:

$$\begin{aligned} \omega_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(5n+1)}{\Gamma(n+1)^5} z^n = \oint \frac{\mathrm{d}s}{e^{2\pi i s} - 1} \frac{\Gamma(5s+1)}{\Gamma(s+1)^5} z^s = \\ = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{5}\right)^5}{n!} z^{-\frac{n+1}{5}} \sin^4 \pi \frac{n+1}{5} e^{\pi i \frac{n+1}{5}}, \end{aligned} \tag{2.3.37}$$

где в верхней строчке интеграл берётся по полюсам в правой полуплоскости: $s = n$, а в нижней строчке по левой полуплоскости, $s = -(n+1)/5$. При этом первый ряд сходится при $|z| < 5^{-5}$, а второй при $|z| > 5^{-5}$. Стоит заметить, что $z = 5^{-5}$ является точкой конифолда, что выражает ещё одну общую особенность пространств модулей - периоды в разных регионах задаются различными степенными рядами, радиус сходимости которых совпадает с расстоянием до специальных точек в пространствах модулей.

В последнем равенстве в (2.3.37) разложение идёт по дробным степеням z, как и ожидается в орбифолдной точке пространства модулей. Это можно использовать для получения новых периодов. Для этого используется монодромия вокруг точки $z=\infty,\ z\to e^{2k\pi i}z=\alpha^k z$. Таким образом получаются 4 периода $\omega_0(\alpha^k z),\ 0\le k\le 3$.

$$\omega_k(\phi):=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{5}\right)^5}{n!}z^{-\frac{n+1}{5}}\sin^4\pi\frac{n+1}{5}\alpha^{(n+1)(k+1/2)}. \tag{2.3.38}$$

Пятый период равен сумме первых четырёх со знаком минус. В работе [23] полученные периоды аналитически продолжаются в окрестности конифолдной точки, а также точки $z=0$, чтобы изучить их поведение при монодромии вокруг этих точек, что позволяет получить периоды в симплектическом базисе через линейные комбинации периодов $\omega_0(\alpha z)$. Этот способ довольно трудоёмок и зависит от конкретной модели. Одним из основных результатов данной работы является другой способ вычисления специальной геометрии, который мы сейчас опишем для случая зеркальной квинтики.

Периоды и осциллирующие интегралы Для начала перепишем периоды в виде *(комплексных) осциллирующих интегралов*. Для этого проделаем следующие преобразования с периодом:

$$\int_{T(\gamma)}\frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4\mathrm{d}x_5}{W(x,\phi_1)}=\int_{T(\gamma_w)}\frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4\mathrm{d}x_5}{W(x,\phi_1)-w}=$$
$$=\int_{w>0}e^{-w}\left(\int_{T(\gamma_w)}\frac{\mathrm{d}^5x}{W(x,\phi_1)-w}\right)\mathrm{d}w, \tag{2.3.39}$$

где в первом равенстве мы ввели мнимую зависимость от дополнительной переменной w, где цикл $T(\gamma_w)$ окружает цикл в гиперповерхности $W(x,\phi_1)=w$ и является непрерывной деформацией цикла $T(\gamma)$ в $\mathbb{C}^5$. В силу однородности, по крайней мере при малых w имеем

$$\int_{T(\gamma_w)}\frac{\mathrm{d}^5x}{W(x,\phi_1)-w}=\int_{\gamma}\frac{\mathrm{d}^5x}{W(x,\phi_1)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{W(x,\phi_1)}\right)=\int_{\gamma}\frac{\mathrm{d}^5x}{W(x,\phi_1)}. \tag{2.3.40}$$

Второе равенство в (2.3.39) - это введение единицы $1=\int_{x\ge 0}e^{-w}\mathrm{d}w$. Теперь возьмём вычет вдоль $W=0$ в интеграле внутри скобок:

$$\int_{w>0}e^{-w}\left(\int_{T(\gamma_w)}\frac{\mathrm{d}^5x}{W(x,\phi_1)-w}\right)\mathrm{d}w=\int_{\Gamma:=\cup_w\gamma_w}e^{-w}\frac{\mathrm{d}^4x\mathrm{d}w}{\partial W(x,\phi_1)/\partial x_5}. \tag{2.3.41}$$

Пятимерный цикл Γ получается объёдинением по всем положительным вещественным w деформированных циклов γ_w. на этом цикле выполняется $W(x) = w$. Последний шаг заключается в замене координат $x_1, \ldots, x_4, w \to x_1, \ldots, x_5$:

$$\int_\Gamma e^{-w} \frac{\mathrm{d}^4 x \mathrm{d}w}{\partial W(x, \phi_1)/\partial x_5} = \int_\Gamma e^{-W(x,\phi_1)} \mathrm{d}^5 x. \tag{2.3.42}$$

Интегралы такого типа называются комплексными осциллирующими интегралами [7], поскольку на вещественном срезе, где экспонента является чисто мнимой, вдали от критических точек фаза интегранта сильно осциллирует. Такие интегралы появляются как в квантовой механике, так и при взятии функциональных интегралов, и обычно берутся методом перевала. В нашем случае на циклах показатель $-W(x, \phi_1)$ является отрицательным вещественным, в частности, интеграл быстро сходится.

Изучим алгебраические свойства таких интегралов. Интеграл такого типа является спариванием определённых групп когомологий и гомологий. Для начала заметим, что группа гомологий, в которой лежат циклы интегрирования естественно определяется циклами, по которым интеграл сходится с точностью до деформаций. Наивно все циклы в плоском пространстве $\mathbb{C}^5$ стягиваются. Однако, в случае осциллирующих интегралов не все циклы являются допустимыми. А на циклах, которые уходят на бесконечность в областях, где вещественная часть показателя экспоненты больше нуля, интеграл расходится. В частности, цикл нельзя деформировать вдоль таких областей. Интеграл сходится по циклам, которые уходят на бесконечность в областях отрицательной вещественной части показателя экспоненты. Такие циклы математически задаются группой относительных гомологий:

$$\mathscr{H}_5^+ := H_5(\mathbb{C}^5, \mathrm{Re}(W) >> 0; \mathbb{Z}) = \lim_{N\to\infty} H_5(\mathbb{C}^5, \mathrm{Re}(W) > N; \mathbb{Z}). \tag{2.3.43}$$

Очевидно, что цикл Γ в формуле является как раз таким циклом, поскольку по определению проложен вдоль области, где функция $W(x, \phi_1)$ принимает только вещественные положительные значения. На самом деле, такой цикл является конкретным представителем класса когомологий, частным случаем так называемого *напёрстка Лефшеца*. Напёрстки Лефшеца являются солитонами, а также суперсимметричными (сохраняющими половину суперзарядов) BPS-бранами с точки зрения теории Ландау-Гинзбурга с суперпотенциалом W. Тем не менее, голоморфные осциллирующие интегралы не различают конкретных представителей класса когомологий, являясь корреляционными функциями на диске теорий Ландау-Гинзбурга в конформном пределе.

Базис в группе $\mathscr{H}_5^+$ можно описать через напёрстки Лефшеца. Для этого надо немного деформировать особенность $W(x, \phi_1)$ неоднородной деформацией так, чтобы она стала функцией Морса, то есть чтобы все особые точки стали невырождены.

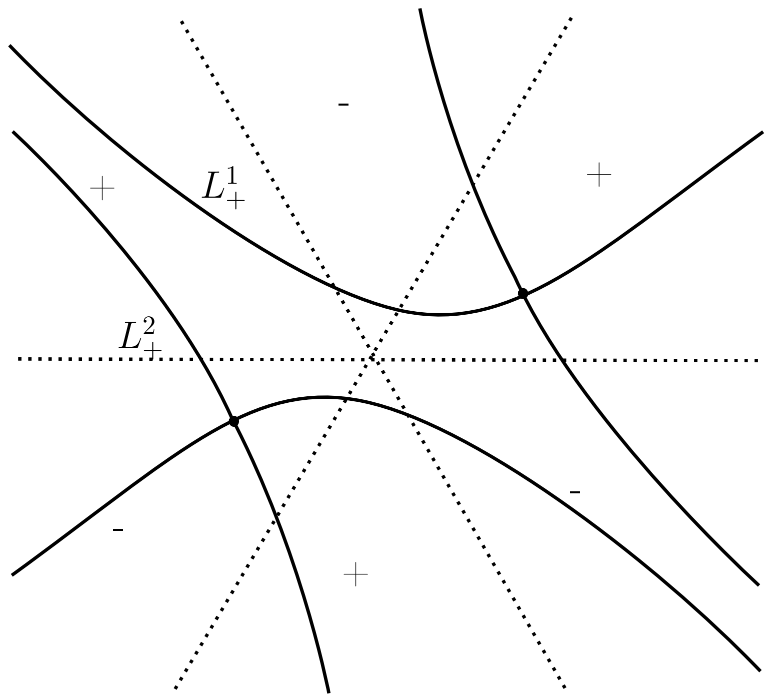


Рис. 2.2: Циклы Лефшеца для функции $W(x) = e^{-\pi i/3}(x^3 - tx)$

В окрестности каждой невырожденной точки p есть Морсовские координаты такие, что

$$W = \sum_{i=1}^{5} \tilde{x}_i^2. \tag{2.3.44}$$

тогда напёрсток Лефшеца растущий из точки p определяется как контур наискорейшего подъёма из этой точки, то есть он удовлетворяет системе уравнений $\operatorname{Im} \partial_i W = 0$. В частности, в Морсовских координатах в окрестности точки p он имеет вид $L_p^+ = \operatorname{Im}(\tilde{x}_i) = 0$, то есть является чисто вещественным циклом в этих координатах. Его продолжение за Морсовскую окрестность определяется всё тем же уравнением наискорейшего подъёма, однако топология таких циклов в общем случае является очень сложной и интересной. Мы не будем обуждать здесь этот вопрос. Отметим только, что количество циклов Лефшеца равняется количеству Морсовских критических точек, то есть числу Милнора, или же степени вырожденности вакуума теории Ландау-Гинзбурга с суперпотенциалом W в начале координат.

Теперь обсудим соответствующую группу когомологий. Она определяется формулой Стокса для интегрантов. Для любой голоморфной 4-формы α, растущей не быстрее полинома на бесконечности должно выполняться

$$0 = \int_\Gamma \mathrm{d}(e^{-W}\alpha) = \int_\Gamma e^{-W} \left(\mathrm{d}\alpha - \mathrm{d}W \wedge \alpha\right). \tag{2.3.45}$$

Введём соответствующий дифференциал, твистованный дифференциал де-Рама

$$D_- := \mathrm{d} - \mathrm{d}W\wedge = e^W \mathrm{d} e^{-W}. \tag{2.3.46}$$

Имеем $D_-^2 = 0$, и комплексный оциллирующий интеграл не меняется при добавке к интегранту форм вида $D_-\alpha$. Таким образом, соответствующая группа когомологий задаётся фактором полиномиальных голоморфных 5-форм на $\mathbb{C}^5$ по твистованному дифференциалу D_- и называется группой относительных когомологий де-Рама:

$$H^5_{D_-}(\mathbb{C}^5) := \Omega^5(\mathbb{C}^5)/D_-(\Omega^4(\mathbb{C}^5)). \tag{2.3.47}$$

Изучим эту группу в координатах. Для этого рассмотрим 5-форму σ и 4-форму α:

$$\sigma = \sigma(x)\,\mathrm{d}^5x, \quad \alpha = \sum_{i\le 5} \alpha^i(x)(\iota_{\partial_i}\mathrm{d}^5x). \tag{2.3.48}$$

При добавлении $D_-\alpha$ к форме σ получаем

$$\sigma + D_-\alpha = (\sigma(x) + \partial_i\alpha^i - \partial_i W\alpha^i)\,\mathrm{d}^5x. \tag{2.3.49}$$

Рассмотрим также кольцо Милнора $\mathcal{R} = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_5]/\mathrm{Jac}(W)$ функции W. Выберем в кольце базис $\{e_i(x)\}_{i=1}^{\mu}$ заданный мономами минимальной возможной степени. Заметим, что соотношение эквивалентности (2.3.49) отличается от соотношения в кольце Милнора на дивергенцию, $\partial_i\alpha^i$, которая имеет степень строго меньшую, чем $\partial_i W\alpha^i$ при однородных функциях $\alpha^i(x)$. Покажем, что на самом деле группа относительных когомологий $H^5_{D_-}(\mathbb{C}^5)$ изоморфна (как группа) кольцу Милнора, хоть и не канонически. Пусть $\sigma_0(x) := \sigma(x)$ - однородный полином. Разложим его в кольце Милнора по базису $e_i(x)$

$$\sigma_0 = \sum_{i\le 5}\partial_i W\alpha_0^i + \sum_{k\le\mu} e_k(x) \tag{2.3.50}$$

выбирая однородную форму α_0. Тогда для дифференциальной формы $\sigma_0\,\mathrm{d}^5x$ в группе $H^5_{D_-}(\mathbb{C}^5)$ имеется калибровочное соотношение

$$\sigma_0\,\mathrm{d}^5x = (\partial_{i\le 5}W\alpha_0^i + \sum_{k\le\mu} c_0^k e_k(x) - \partial_i\alpha_0^i)\,\mathrm{d}^5x. \tag{2.3.51}$$

Теперь определим $\sigma_1 := -\partial_i\alpha_0^i$. Степень σ_1 равняется степени σ_0 - 5. Применим рассуждение выше рекуррентно к $\sigma_n := -\partial_i\alpha_n^i$.

$$\sigma_n\,\mathrm{d}^5x = (\partial_{i\le 5}W\alpha_n^i + \sum_{k\le\mu} c_n^k e_k(x) - \partial_i\alpha_n^i)\,\mathrm{d}^5x. \tag{2.3.52}$$

Когда $5n$ превысит степень формы σ_0, рекурсия оборвётся. В результате получим соотношение эквивалентности

$$\sigma_0\,\mathrm{d}^5x = D_-\alpha + \sum_{k\le\mu} c^k e_k(x)\,\mathrm{d}^5x, \tag{2.3.53}$$

где $\alpha = -\sum_n \alpha_n$ и $c^k = \sum_n c_n^k$. Последняя формула означает, что любую форму из $H^5_{D_-}(\mathbb{C}^5)$ можно единственным образом представить в виде базисной линейной комбинации базисных форм $e_i(x)\,\mathrm{d}^5x$, то есть $H^5_{D_-}(\mathbb{C}^5) \simeq \mathcal{R}$. В частности, размерность группы равна числу Милнора μ, что совпадает с размерностью группы гомологий, порождённой напёрстками Лефшеца.

Известное утверждение из теории особенностей (например [7]) состоит в том, что осциллирующий интеграл даёт невырожденное спаривание между группами относительных гомологий $\mathscr{H}_5^+$ и когомологий $H^5_{D_-}(\mathbb{C}^5)$:

$$\langle L_i^+,\ e_j(x)\,\mathrm{d}^5x\rangle := \int_{L_i^+} e_j(x)\, e^{-W}\mathrm{d}^5x. \tag{2.3.54}$$

Это спаривание можно использовать для того, чтобы определить специальный базис циклов из $\mathscr{H}_5^+$ интегралы по которым берутся путём алгебраических манипуляций. Определим $\Gamma_+^j \in \mathscr{H}_5^+ \otimes \mathbb{C}$ по дуальности формам $e_i(x)\,\mathrm{d}^5x$ в точке $\phi_1 = 0$:

$$\int_{\Gamma_+^j} e_i(x)\, e^{-W_0(x)}\mathrm{d}^5x = \delta_i^j. \tag{2.3.55}$$

Эти циклы определённо не являются настоящими геометрическими циклами, а линейными комбинациями поледних с комплексными коэффициентами. Интегрирование по таким циклам сводится к рекуррентной процедуре (2.3.53).

Следующий вопрос заключается в том, какие из циклов $\mathscr{H}_5^+$ возникают из циклов $H_3(\check{\mathcal{Q}})$ при преобразовании (2.3.1). Для того, чтобы решить этот вопрос, обратимся вновь к дискретным группам симметрий. Все циклы в $H_3(\check{\mathcal{Q}})$ явно инвариантны под действием группы квантовой симметрии Q_W, поскольку она возникает из тривиальных преобразований проективного пространства. Помимо того, все циклы инвариантны относительно группы $\mathbb{Z}_5^3 \subset G_{W_0}$ по построению зеркального образа квинтии. Это значит, что все циклы в $\mathscr{H}_5^+$, приходящие из $H_3(\check{\mathcal{Q}})$ (точнее их классы когомологий) должны быть инвариантны относительно группы квантовых симметрий зеркальной квинтики $G := Q_W \times \mathbb{Z}_5^3 \simeq \mathbb{Z}_5^4$. Это означает, что мы должны рассмотреть инвариантное подпространство $(\mathscr{H}_5^+)^G$. Удобно для этого перейти к когомологиям $H^5_{D_-}(\mathbb{C}^5)^G$. Любой элемент этих когомологий единственным образом представляется дифференциальной формой вида

$$e(x)\,\mathrm{d}^5x, \tag{2.3.56}$$

где $e(x)$ лежит в кольце Милнора $\mathcal{R}$. Дифференциал d^5x очевидно инвариантен относительно G, поэтому $e(x)$ должен быть G-инвариантным элементом кольца Милнора. Мы приходим к рассмотрению G-инвариантного кольца Милнора

$$\mathcal{R}^G := \left(\frac{\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_5]}{\partial_i W(x,\phi_1)}\right)^G. \tag{2.3.57}$$

Если обычное кольцо Милнора является киральным кольцом теории Ландау-Гинзбурга с суперпотенциалом $W(x, \phi_1)$, то инвариантное кольцо Милнора является (нетвистованным сектором) киральным кольцом *орбифолда* Ландау-Гинзбурга по группе квантовой симметрии G. Этот факт является проявлением хорошо известного [93] соответствия нелинейных сигма-моделей на многообразия Калаби-Яу и орбифолдов Ландау-Гинзбурга.

В случае зеркальной квинтики все G-инвариантные элементы являются степенями единственной допустимой деформации $\prod_{i\leq 5} x_i$. Таким образом

$$\mathcal{R}^G = \langle 1, \prod_{i\leq 5} x_i, \prod_{i\leq 5} x_i^2, \prod_{i\leq 5} x_i^3 \rangle. \tag{2.3.58}$$

По дуальности размерность группы $\mathscr{H}_5^+$ также равна четырём и равна $H_3(\check{\mathcal{Q}})$. Это четырёхмерное подпространство соответствует определённому четырёхмерому мотиву в третьих (ко)гомологиях квинтики из семейства Дворка.

В общем случае G инвариантные относительные циклы всегда приходят из трёмерных когомологий многообразий Калаби-Яу и их группа изоморфна некоторой подгруппе всех третьих когомологий.

Таким образом, для зеркальной квинтики имеется 4 цикла. Обозначим $e_k(x) := \prod_{i\leq 5} x_i^k$, $0 \leq k \leq 3$ и дуальные циклы Γ_+^i. Циклы Γ_+^i имеют хорошо определённые (и различные) веса под действием группы фазовой симметрии. В силу этого периоды определённые по этим циклам также являются собственными функциями под действием фазовой симметрии. Выпишем периоды в базисе Γ_+^i. Для этого разложим экспоненту в интеграле в ряд по параметру $\phi := \phi_1$

$$\begin{aligned}\sigma_j(\phi_1) := \int_{\Gamma_j} e^{-W(x,\phi)} \mathrm{d}^5 x = \int_{\Gamma_j} e^{-W_0(x) - \phi \prod_{i\leq 5} x_i} \mathrm{d}^5 x = \\ = \sum_{n\geq 0} \frac{\phi^n}{n!} \int_{\Gamma_j} e^{-W_0(x)} (\prod_{i\leq 5} x_i)^n \mathrm{d}^5 x.\end{aligned} \tag{2.3.59}$$

Вычисление периодов свелось к вычислению интегралов вида

$$\int_{\Gamma_j} e^{-W_0(x)} (\prod_{i\leq 5} x_i)^n \mathrm{d}^5 x, \tag{2.3.60}$$

то есть к разложению дифференциальной формы $(\prod_{i\leq 5} x_i)^n \mathrm{d}^5 x$ по базису в когомологиях. Это легко сделать рекурсией по каждой из пяти переменных

$$(\prod_{i\leq 5} x_i)^n \mathrm{d}^5 x \sim (\prod_{i\leq 5} x_i)^n \mathrm{d}^5 x - D_-(\frac{1}{5} x_1^{n-4} \prod_{2\leq i\leq 5} x_i^n \mathrm{d}^5 x) = \frac{n-4}{5} x_1^{n-5} \prod_{2\leq i\leq 5} x_i^n \mathrm{d}^5 x.y \tag{2.3.61}$$

Повторяя то же самое для $x_2, \cdots, x_5$ получаем

$$(\prod_{i\le 5} x_i)^n \mathrm{d}^5 x \sim \left(\frac{n-4}{5}\right)^5 \prod_{i\le 5} x_i^{n-5}. \tag{2.3.62}$$

Пусть $n = 5m + k$. Производя индукцию по n получаем

$$(\prod_{i\le 5} x_i)^{5m+k} \mathrm{d}^5 x \sim \left(\frac{k+1}{5}\right)_m^5 \prod_{i\le 5} x_i^k = \frac{\Gamma\left(m+\frac{k+1}{5}\right)^5}{\Gamma\left(\frac{k+1}{5}\right)^5} \prod_{i\le 5} x_i^k, \tag{2.3.63}$$

где символ Похгаммера равен

$$(a)_n := \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1)\cdots(a+n-1). \tag{2.3.64}$$

Если $k = 4$, то правая часть является полной производной и равна нулю. Подставляя формулу (2.3.109) в (2.3.59) получаем

$$\sigma_k(\phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(m+\frac{k+1}{5}\right)^5}{\Gamma\left(\frac{k+1}{5}\right)^5} \frac{(-\phi)^{5n+k}}{(5n+k)!}. \tag{2.3.65}$$

Можно разложить период $\omega_0(\phi)$ по базису $\sigma_k(\phi)$:

$$\omega_0(\phi) = \frac{1}{2i} \sum_{k=1}^{4} \Gamma\left(\frac{k+1}{5}\right)^5 \sin^4 \pi \frac{k+1}{5} e^{\pi i \frac{k+1}{5}} \sigma_k(\phi), \tag{2.3.66}$$

где мы изменили нормировку формы Ω_ϕ на $z^{1/5}$.

Из этой формулы, например, видно, насколько далеки циклы Γ_+^k от того, чтобы быть целочисленными. Тем не менее они оказываются удобными для нахождения специальной Кэлеровой геометрии.

Формула для Кэлерова потенциала и пересечения циклов Для начала, перепишем формулу (2.1.47) для Кэлерова потенциала через периоды в произвольном базисе. Рассмотрм произвольный базис циклов с целочисленными коэффициентами $q_i \in H_3(\check{\mathcal{Q}}, \mathbb{Z})$. Определим также периоды по этим циклам

$$\omega_i(\phi) := \int_{q_i} \Omega_\phi. \tag{2.3.67}$$

Введём матрицу C обратную матрице пересечений, то есть $(C^{-1})_{ij} = q_i \cap q_j$. Она же является матрицей спаривания дуальных коциклов.Тогда можно переписать билинейные соотношения Римана в таком базисе периодов.

$$e^{-K} = \int_K \Omega \wedge \overline{\Omega} = \Pi_i(\phi)\, \Sigma^{ij} \overline{\Pi_j(\phi)} = \omega_i(\phi) C^{ij} \overline{\omega_j(\phi)}. \tag{2.3.68}$$

Матрица обратная матрице пересечений циклов гарантирует, что выражение не зависит от выбора базиса. Нам потребуется модификация этой формулы на случай линейных комбинаций циклов с комплексными коэффициентами, поскольку именно такими периодами являются собственные относительно монодромии вокруг нуля периоды $\sigma_i(\phi)$. Рассмотрим матрицу перехода между периодами по циклам с целочисленными и комплексными коэффициентами

$$\omega_i(\phi) = T_i^j \sigma_j(\phi). \tag{2.3.69}$$

Подставим эту формулу в (2.3.68) получаем

$$e^{-K} = \omega(\phi)^t T^t C \overline{T} \overline{\omega(\phi)}. \tag{2.3.70}$$

Матрица $T^t C \overline{T}$ выражается через голоморфную обратную матрицу "пересечений" циклов $\eta := T^t C T$ по формуле

$$T^t C \overline{T} = \eta T^{-1} \overline{T} = \eta M, \tag{2.3.71}$$

где мы определили матрицу *вещественной структуры* $M = T^{-1}\overline{T}$. Матрица M не зависит от явного выбора циклов q_i пока они остаются целочисленными или даже вещественными, а также удовлетворяет свойству $M\bar{M} = 1$. Матрица вещественной структуры является матрицей операции операции комплексного сопряжения на группе $\mathscr{H}_5^+ \otimes \mathbb{C} = H_5(\mathbb{C}^5, \mathrm{Re}(W) >> 0; \mathbb{C})$ в базисе циклов Γ_+^i или же на группе $H_3(\check{\mathcal{Q}}) \otimes \mathbb{C}$ в базисе циклов γ^i (которые являются прообразами циклов Γ_+^i при переходе от периода к осциллирующему интегралу. В результате наших манипуляций мы получили основную формулу для нахождения специальной геометрии

$$e^{-K} = \sigma_i(\phi) \eta^{ij} M_j^{\bar{k}} \overline{\sigma_k(\phi)}, \tag{2.3.72}$$

где матрица η^{ij} являтся обратной матрицей (голоморфной) пересечений циклов γ^j, а $M_i^{\bar{k}}$ матрицей вещественной структуры.

Выбор циклов Γ^j обусловлен тем фактом, что в этом базисе легко найти обе матрицы M и η используя уже обозначенную выше связь с орбифолдом теории Ландау-Гинзбурга.

Матрица η непосредственно связана с топологическим спариванием вычетов в теории Ландау-Гинзбурга, в то время как матрица вешественной структуры является матрицей комплексного сопряжения в киральном кольце.

Для начала найдём матрицу η^{ij}. Для этого нам потребуется более детально прояснить соответствие периодов с осциллирующими интегралами.

Рассмотим снова результат формул (2.3.39)-(2.3.1)

$$\int_{\gamma_w} \frac{\mathrm{d}^4 x}{\partial W / \partial x_5} = \int_{\Gamma_+} e^{-W} \mathrm{d}^5 x. \tag{2.3.73}$$

Эта формула является частным случаем более общей формулы [7] связывающей преобразования Лапласа периодов с осциллирующими интегралами (экспоненциальными периодами в терминологии [66])

$$\int_{\mathbb{R}^+} e^{-w/z} \int_{\gamma_w} \frac{\mathrm{d}^4 x}{\partial W(x,\phi)/\partial x_5} \mathrm{d}w = \int_{\Gamma_z} e^{-W(x,\phi)/z} \mathrm{d}^5 x. \tag{2.3.74}$$

По построению цикл γ_w является ограничением цикла Γ_z на гиперповерхность $W(x,\phi) = w$. В теории особенностей гиперповерхность $W(x,\phi) = w$ называется слоем Милнора. Все такие поверхности диффеоморфны друг другу, в частности, их гомологии совпадают. Локально по w, цикл γ_w является непрерывной деформацией, а потому задаёт один и тот же элемент в гомологиях слоя (то есть цикл плоский относительно связности Гаусса-Манина). Такие циклы стягиваются в точке при $w = 0$, а потому носят название *исчезающих циклов*. В плоскости значений функции W цикл Γ_z является вещественной неотрицательной полуосью. Прообразом каждой из точек w является исчезающий цикл γ_w в соответствующем слое Милнора.

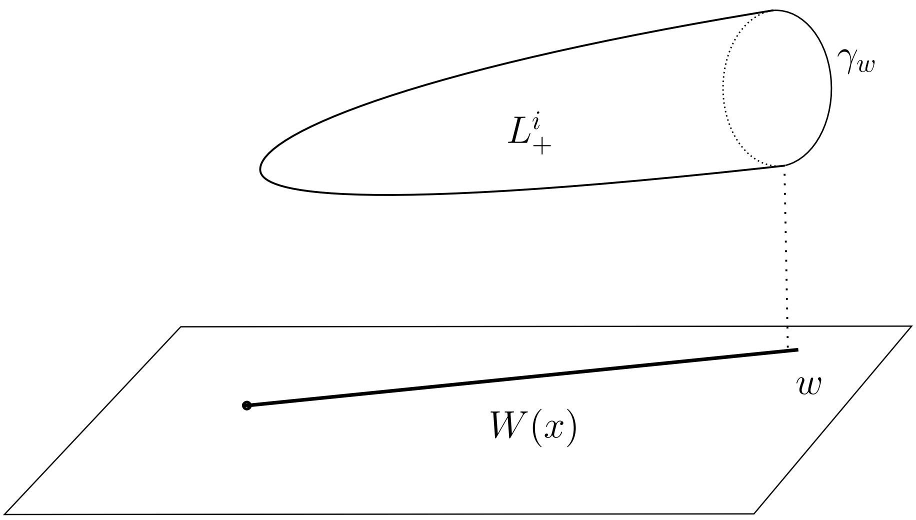


Рис. 2.3: Циклы Лефшеца и исчезающие циклы

С осциллирующими интегралами вида

$$\int_{\Gamma_z} e^{-W(x,\phi)/z} \mathrm{d}^5 x \tag{2.3.75}$$

связаны группы гомологий

$$\mathscr{H}_5^z := H_5(\mathbb{C}^5, \mathrm{Re}(W/z) >> 0; \mathbb{Z}) \tag{2.3.76}$$

и когомологий

$$\begin{aligned} &H^5_{D_z}(\mathbb{C}^5) := \Omega^5(\mathbb{C}^5)/D_z(\Omega^4(\mathbb{C}^5)), \\ &D_z := z\mathrm{d} - \mathrm{d}W\wedge = e^{zW}\mathrm{d}e^{-zW}. \end{aligned} \tag{2.3.77}$$

Группы $\mathscr{H}_5^+$ и $H^5_{D_-}(\mathbb{C}^5)$ очевидным образом получаются из выписанных выше при $z = 1$. В случае однородных деформаций особенностей, как в случае квинтики введение переменной z не приводит к появлению дополнительной структуры, поскольку от z можно избавиться перемасштабированием x.

$$\int e^{-zW(x,\phi)} \mathrm{d}^5 x = z^{-1} \int e^{-zW(x,\phi)} \mathrm{d}^5 x. \tag{2.3.78}$$

В общем же случае такие осциллирующие интегралы имеют иррегулярные особености при $z = 0, \infty$, но это выходит за рамки данной работы.

Для введения спаривания циклов нам понадобится спецификация интегралов (2.3.75) на случай $z = -1$. Обозначим соответствующую группу циклов за $\mathscr{H}_5^- := H_5(\mathbb{C}^5, \mathrm{Re}(W) << 0; \mathbb{Z})$. Между группами $\mathscr{H}_5^+$ и $\mathscr{H}_5^-$ есть невырожденное хорошо определённое спаривание, которое задаётся геометрически пересечением циклов. Чтобы понять, что это спаривание является невырожденным, можно произвести малую неоднородную деформацию функции

$$W(x, \phi) \to \tilde{W}(x, \phi) = W(x, \phi) + \sum_{i \leq 5} c_i x_i. \tag{2.3.79}$$

Тогда в окрестности каждой невырожденной критической точки функция имеет вид $\tilde{W} = \sum_{i \leq 5} \tilde{x}_i^2$, где $\tilde{x}_i$ - Морсовские координаты. Из каждой критической точки можно построить два напёрстка Лефшеца: в направлении роста и убывания вещественной части $\mathrm{Re}(\tilde{W})$. В координатах $\tilde{x}_i$ они имеют вид $\mathrm{Im}(x_i) = 0$ и $\mathrm{Re}(x_i) = 0$ соответственно. Их единственная точка пересечения - это критическая точка с индексом пересечения $+1$ в естественной ориентации.

Количество напёрстков Лефшеца совпадает с размерностью групп гомологий, поэтому спаривание невырождено. Теперь результат для функции W получается выключением параметров деформации $c_i \to 0$ из деформационной инвариантности групп гомологий.

Важное утверждение, которое мы используем, что формула (2.3.73) не только устанавливает соответствие периодов и экспоненциальных периодов, но и связанных структур на группах (ко)гомологий. А именно

1. при отображении $\gamma_w^i \to \Gamma_\pm^i$, $\gamma_w^- = W^{-1}(w) \cap \Gamma_\pm^i$ целочисленные циклы переходят в целочисленные, то есть индуцированное отображение в гомологиях сохраняет целочисленную решётку, то есть является изоморфизмом на целочисленных гомологиях. В частности, вещественные стуктуры на этих группах совпадают.

2. при том же отображении матрица пересечений исчезающих циклов переходит в матрицу пересечений относительных циклов:

$$\gamma_w^i \cap \gamma_w^j = \Gamma_+^i \cap \Gamma_-^j. \tag{2.3.80}$$

Первый пункт основывается на том, что при построении соответствий между циклами γ_w и Γ_+ задаваемыми формулами $\gamma_w = \Gamma_+ \cap W^{-1}(w)$, $\Gamma_+ =$ разнесение цикла γ_w градиентным потоком, все операции производятся изначально над циклами с целыми коэффициентами.

Чтобы понять, почему верно второе утверждение, нужно построить два цикла Лефшеца Γ^i_+, Γ^j_- градиентным потоком из исчезающих циклов $\gamma^i_w \cap \gamma^j_{-w}$. Циклы Γ^i_+, Γ^j_- пересекаются лишь при $x = 0$, но в этой точке установить индекс пересечения явно трудно. Тогда продеформируем один из циклов, например Γ^j_- в окрестности нуля так, что по-прежнему при каждом $w \in \mathbb{C}$ пересечение Γ^j_- со слоем Милнора $W(^{-1}w)$ либо пусто, либо равняется исчезающему циклу γ_w. Если цикл Γ^j_- нетривиален, то при деформации часть цикла в окрестности $W^{-1}(0)$ обязательно зайдёт в область $\mathrm{Re}(W(x,\phi)) > 0$ и, в частности, пересечёт область $W(x,\phi) \in \mathbb{R}_{>0}$ в некоторой точке $W(x,\phi) = w_+$. В прообразе $W^{-1}(w_+)$ оба цикла $\Gamma^i_+ = \gamma^i_{w_+}$ и $\Gamma^j_- = \gamma^j_{w_+}$. Поэтому индекс пересечения $\Gamma^i_+ \cap \Gamma^j_- = \pm\gamma^i_{w_+} \cap \gamma^j_{w_+}$. Знак не столь существенен, и его можно фиксировать подходящим выбором ориентации на циклах.

Используя это соответствие, мы найдём голоморфную обратную матрицу пересечений циклов η^{ij} через пересечение циклов $(\eta^{-1})^{ik} = \Gamma^i_+ \cap \Gamma^k_-$.

Последнее легче сделать по дуальности

$$\int_{\Gamma^i_+} e^{-W_0(x)} e_j(x)\, \mathrm{d}^5 x = \delta^i_j. \tag{2.3.81}$$

Вычислим, для начала интегралы по циклам Γ^i_- (в этом тексте циклы Γ^i_+ отличаются знаками от соглашенией [1–4]. По определению этих циклов

$$\int_{\Gamma^i_+} e^{-W_0(x)-\phi e_1(x)} \mathrm{d}^5 x = \int_{\Gamma^i_-} e^{W_0(x)+\phi e_1(x)} \mathrm{d}^5 x. \tag{2.3.82}$$

Заметим, что $e_k(x) = (e_1(x))^k$. Тогда искомые интегралы можно получить дифференцированием (2.3.82) по ϕ при $\phi = 0$.

$$\int_{\Gamma^i_+} e^{-W_0(x)} e_k(x)\, \mathrm{d}^5 x = (-1)^k \int_{\Gamma^i_-} e^{W_0(x)} e_k(x)\, \mathrm{d}^5 x. \tag{2.3.83}$$

получаем

$$\eta_{ik} \int_{\Gamma^i_+} e^{-W_0(x)} e_j(x)\, \mathrm{d}^5 x \int_{\Gamma^k_-} e^{W_0(x)} e_l(x)\, \mathrm{d}^5 x = \eta_{ik} \delta^i_j (-1)^l \delta^k_l = (-1)^l \eta_{jl}, \tag{2.3.84}$$

то есть можно искать матрицу пересечений циклов через осциллирующие интегралы.

Теперь мы воспользуемся ещё одним полезным утверждением [1, 30, 77], которое связывает спаривание осциллирующих интегралов и вычеты. Утверждение заключается в следующем:

$$\eta_{ik} \int_{\Gamma_+^i} e^{-zW_0(x)} e_j(x)\, \mathrm{d}^5 x \int_{\Gamma_-^k} e^{zW_0(x)} e_l(x)\, \mathrm{d}^5 x = \\ = z^{-5} \left(\mathrm{Res} \frac{e_j(x) e_l(x)\, \mathrm{d}^5 x}{\partial_1 W_0 \cdots \partial_5 W_0} + O(z^{-1}) \right). \quad (2.3.85)$$

Чтобы проверить это утверждение вновь перейдём к Морсовской деформации $\tilde{W}_0 = W_0 + \sum_i c_i x_i$ и воспользуемся методом перевала. Выберем в качестве циклов интегрирования циклы Лефшеца $L_\pm^i$ из Морсовских критических точек p_i. Период по циклу наискорейшего подъёма (спуска) выражается по методу перевала как

$$\int_{L_\pm^i} e^{\mp z\tilde{W}_0} e_k(x) \mathrm{d}^5 x = z^{-5/2} \frac{e^{\mp z\tilde{W}_0(p_i)} e_k(p_i)}{\sqrt{\det \partial_i \partial_j \tilde{W}_0(p_i)}} + O(z^{-7/2}). \quad (2.3.86)$$

Подставляя эту асимптотику в форму (2.3.85) получаем

$$\sum_{i \leq 4} \int_{L_+^i} e^{-z\tilde{W}_0(x)} e_j(x)\, \mathrm{d}^5 x \int_{L_-^i} e^{z\tilde{W}_0(x)} e_l(x)\, \mathrm{d}^5 x = \\ = z^{-5} \left(\sum_{i \leq 4} \frac{e_j(p_i) e_l(p_i)\, \mathrm{d}^5 x}{\det \partial_k \partial_p \tilde{W}_0} + O(z^{-1}) \right). \quad (2.3.87)$$

Для вычета Гротендика для функции Морса $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ выполняется формула

$$\mathrm{Res} \frac{\alpha\, \mathrm{d}^5 x}{\partial_1 f \cdots \partial_n f} = \sum_{p_i \in Crit(f)} \frac{\alpha(p_i)}{\det \partial_j \partial_k f}. \quad (2.3.88)$$

Теперь формула (2.3.85) получается из формулы (2.3.87) при выключении параметров деформации $c_i \to 0$ в силу непрерывности всех выражений по c_i.

В случае квинтики (и её зеркального образа) суперпотенциал $W_0(x) = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5$ обладает повышенной симметрией, в результате чего в формуле (2.3.85) старшие члены по z^{-1} исчезают. Действительно, каждый базисный элемент инвариантного кольца Милнора $e_i(x) \in (\mathcal{R})^G$ имеет определённый вес под действием фазовой группы симметрий Π_{W_0}. Спаривание коциклов (2.3.85) инвариантно относительно фазовой симметрии, поскольку это замена координат.

Рассмотрим, например, $g \in \Pi_{W_0}$, $g(x_i) = \delta_{i1} \alpha x_i$, где $\alpha^5 = 1$. Тогда

$$g(e_i(x)\, \mathrm{d}^5 x) = \alpha^{i+1} e_i(x)\, \mathrm{d}^5 x. \quad (2.3.89)$$

Произведём такую замену координат под интегралом в формуле (2.3.85)

$$\eta_{ik}\int_{\Gamma^i_+} e^{-zW_0(x)}e_j(x)\,\mathrm{d}^5x\int_{\Gamma^k_-} e^{zW_0(x)}e_l(x)\,\mathrm{d}^5x = \\ = \alpha^{j+l+2}\eta_{ik}\int_{g^{-1}(\Gamma^i_+)} e^{-zW_0(x)}e_j(x)\,\mathrm{d}^5x\int_{g^{-1}(\Gamma^k_-)} e^{zW_0(x)}e_l(x)\,\mathrm{d}^5x. \quad (2.3.90)$$

В формуле выше можно выразить циклы $g^{-1}(\Gamma^i_\pm)$ через циклы $\Gamma^i_\pm$, при этом матрица пересечений циклов останется неизменной. Отсюда следует $\alpha^{j+l+2} = 1$, то есть $i + j = 3$, поскольку $0 \leq i, j \leq 3$.

Также спаривание (2.3.85) является однородным степени 25, если ввести веса $wt(z) = -5$, $wt(\mathrm{d}) = 0$. В частности, если $wt(e_i(x)) + wt(e_j(x)) < 15$, то интеграл равен нулю, а поправки к вычету появляются только если $wt(e_i(x)) + wt(e_j(x)) \geq 20$. Но это означает, что $i + j > 3$, тогда интеграл равен нулю в силу инвариантности под действием фазовой симметрии.

В результате этих рассуждений мы получили, что для зеркальной квинтики метод перевала оказался точным, и верна формула

$$\eta_{ik}\int_{\Gamma^i_+} e^{-W_0(x)}e_j(x)\,\mathrm{d}^5x\int_{\Gamma^k_-} e^{W_0(x)}e_l(x)\,\mathrm{d}^5x = \mathrm{Res}\frac{e_j(x)e_l(x)\,\mathrm{d}^5x}{\partial_1 W_0\cdots\partial_5 W_0} \quad (2.3.91)$$

Ввиду (2.3.84) отсюда следует, что обратная голоморфная матрица пересечения комплексных циклов $\Gamma^i_\pm$ совпадает с топологической метрикой теории Ландау-Гинзбурга.

$$(-1)^l\eta_{jl} = \mathrm{Res}\frac{e_j(x)e_l(x)\,\mathrm{d}^5x}{\partial_1 W_0\cdots\partial_5 W_0} = \delta_{j+l=3}. \quad (2.3.92)$$

В рассматриваемых нами случаях всегда будет достаточно большая группа фазовой симметрии, чтобы обобщение этого равенства было верным, то есть голоморфная матрица пересечения комплексных циклов собственных относительно действия фазовой симметрии равняется обратной матрице к топологической метрике теории Ландау-Гинзбурга в дуальном базисе инвариантного кольца Милнора.

Нахождение матрицы вещественной структуры в базисе $\Gamma^i_\pm$ несколько сложнее. Это можно сделать как минимум тремя способами в случае квинтики и её зеркального образа. Первый способ заключается в использовании периодов в каком-нибудь вещественном или целочисленном базисе. Второй способ основывается на монодромии, и третий на явном вычислении периодов в базисе циклов Лефшеца.

Для начала сделаем несколько общих замечаний о вещественной структуре. Как уже упоминалось, вещественная структура $M_k^{\bar{j}}$ - это матрица комплексного сопряжения в нестандартном базисе, в частности $M\bar{M} = 1$. Формула для Кэлерова потенциала метрики переписывается в виде

$$e^{-K} = \eta_{il} M_{\bar{k}}^{l} \int_{\Gamma_+^i} e^{-W(x,\phi)} \mathrm{d}^5 x \overline{\int_{\Gamma_-^k} e^{W(x,\phi)} \mathrm{d}^5 x}, \tag{2.3.93}$$

где $\overline{\Gamma_-^k} = M_l^{\bar{k}} \Gamma^l$. Воспользуемся вновь группой фазовой симметрии. Пусть, как и раньше, $g \in \Pi_{W_0},\ g(x_i) = \delta_{i1} \alpha x_i$, где $\alpha^5 = 1$. В силу инвариантности интегралов при заменах координат, а также инвариантности матриц пересечения циклов при диффеоморфизмах получаем

$$\begin{aligned} &\eta_{il} M_{\bar{k}}^{l} \int_{\Gamma_+^i} e^{-W(x,\phi)} \mathrm{d}^5 x \overline{\int_{\Gamma_-^k} e^{W(x,\phi)} \mathrm{d}^5 x} = \\ &\qquad = \alpha^{i+1} \overline{\alpha}^{k+1} \eta_{il} M_{\bar{k}}^{l} \int_{g^{-1}(\Gamma_+^i)} e^{-W(x,\phi)} \mathrm{d}^5 x \overline{\int_{g^{-1}(\Gamma_-^k)} e^{W(x,\phi)} \mathrm{d}^5 x}, \end{aligned} \tag{2.3.94}$$

где интеграл является собственной функцией преобразования g поскольку таковыми являются циклы интегрирования. Как и выше, отсюда следует, что префактор должен равняться единице, то есть $\alpha^{i-j} = 1$, откуда, с учётом $0 \leq i, j \leq 3$, следует, что $i = j$.

Полученный результат означает, что

$$e^{-K} = \sum_{i=0}^{3} A_i |\sigma_i(\phi)|^2. \tag{2.3.95}$$

Подставляя $\eta^{ik} = \delta_{i+k,3}(-1)^{k+1}$ получаем вид матрицы вещественной структуры $M_l^{\bar{k}} = \delta_{k+l,3} A_l (-1)^l$. Диагональный вид экспоненты Кэлерова потенциала специальной метрики и антидиагональный вид матрицы вещественной структуры также являются общими фактами для многообразий Калаби-Яу с большой группой фазовой симметрии.

Самый простой способ найти вещественную структуру заключается в том, чтобы извлечь её из периодов в каком-нибудь целочисленном или, хотя бы, вещественном базисе циклов. Если $\omega_i(\phi)$ - периоды по вещественным циклам и $\omega_i(\phi) = T_i^j \sigma_j(\phi)$, то $M_i^{\bar{k}} = (T^{-1})_i^l \overline{T_l^k}$. В качестве циклов по вещественному базису в случае зеркальной квинтики можно выбрать фундаментальный период $\omega_0(\phi)$ и полученные из него монодромией вокруг $\phi = 0$, то есть определённые формулой (2.3.38). Находим матрицу T_i^j

$$T_i^j = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \Gamma\left(\frac{k+1}{5}\right) \sin^4 \pi \frac{j+1}{5} \alpha^{(i+1)(j+1/2)} = A_j \alpha^{i(j+1/2)}. \tag{2.3.96}$$

Используя специальный вид матрицы T её можно обратить и найти M

$$M_j^{\bar{k}} = \delta_{i+k,3} \frac{\Gamma\left(\frac{4-i}{5}\right)^5}{\Gamma\left(\frac{i+1}{5}\right)^5}. \tag{2.3.97}$$

В итоге подставляя (2.3.59), (2.3.92) и (2.3.97) в (2.3.72) получаем финальный ответ для Кэлерова потенциала специальной метрики на пространстве модулей комплексных структур зеркальной квинтики:

$$e^{-K} = \sum_{k=0}^{3} (-1)^k \gamma\left(\frac{k+1}{5}\right)^5 |\sigma_k(\phi)|^2, \tag{2.3.98}$$

где $\gamma(x) = \Gamma(x)/\Gamma(1-x)$. Этот ответ, разумеется, совпадает с выражением из работы [23]. Наш способ вычисления специальной геометрии использует вычисления в инвариантном кольце Милнора особенности, задаваемой уравнением зеркальной квинтики. Также при вычислении не использовались моделезависимые соображения монодромии и не пришлось искать симплектический базис в когомологиях. Симплектический базис, в принципе, можно найти применяя процедуру ортогонализации Грамма-Шмидта к матрице пересечений вещественных циклов $\Gamma_+^i + \Gamma_+^j M_j^{\bar{k}}$.

2.3.2 Квинтика в $\mathbb{P}^4$

После вычисления специальной геометрией на одномерном пространстве модулей зеркальной квинтики, можно перейти к 101-мерному пространству модулей комплексных структур на самой квинтике. На этом примере мы продемонстрируем второй способ нахождения вещественной структуры, использующий соображения монодромии периодов. Как упоминалось выше, уравнение квинтики общего вида записывается

$$W(x,\phi) = W_0(x) + \sum_{s=1}^{101} \phi_s e_s(x) = \sum_{i\leq 5} x_i^5 + \sum_{s=1}^{101} \phi_s x_1^{s_1} \cdots x_5^{s_5}. \tag{2.3.99}$$

Здесь, в отличие от предыдущего раздела ϕ без индекса обозначает вектор из 101 элемента, s без индекса - номер от 1 до 101, а $0 \leq s_i \leq 3$ означает экспоненты монома соответствующего деформации ϕ_s, в частности, $\sum_{i\leq 5} s_i = 5$. Деформации разбиваются по классам под действием группы перестановок S_5: (1,1,1,1,1), (2,1,1,1,0), (2,2,1,0,0), (3,1,1,0,0), (3,2,0,0,0).

Каждый моном имеет уникальный вес под действием группы фазовой симметрии $\Pi_{W_0} \simeq \mathbb{Z}_5^5$. Группа квантовой симметрии (то есть подгруппа фазовой симметрии действующая тождественным преобразованием на самой квинтике) значительно меньше, чем в предыдущем случае и состоит из диагональных растяжений : $\mathbb{Z}_5 \simeq Q \subset \Pi_{W_0}$.

В отличие от предыдущих методов вычисления специальной геометрии, общая идея вычисления остаётся той же. Главное отличие заключается в том, что инвариантное кольцо Милнора в случае квинтики значительно больше.

Периоды квинтики Периоды по-прежнему задаются осциллирующими интегралами,

$$\int_\gamma \Omega_\phi = \int_{\Gamma_+} e^{-W(x,\phi)} \mathrm{d}^5 x, \tag{2.3.100}$$

где циклы интегрирования Γ_+ лежат в группе

$$(\mathscr{H}_5^+)^Q = H_5(\mathbb{C}^5, \mathrm{Re}(W) >> 0; \mathbb{Z})^{\mathbb{Z}_5}. \tag{2.3.101}$$

Дуальная группа когомологий

$$H^5_{D_-}(\mathbb{C}^5)^Q = \left(\frac{\Omega^5(\mathbb{C}^5)}{D_-(\Omega^4(\mathbb{C}^5))} \right)^Q. \tag{2.3.102}$$

Имеется изоморфизм этой группы с инвариантным кольцом Милнора

$$\mathcal{R}^Q = \frac{\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_5]}{(\partial_1 W, \cdots, \partial_5 W)}. \tag{2.3.103}$$

В обычном кольце Милнора $\mathcal{R}$ в точке $\phi = 0$ есть естественный базис порождённый мономами вида $x_1^{m_1} \cdots x_5^{m_5}$, где $m_5 \leq 3$, всего имеется 1024 элемента. Условие инвариантности относительно $x_i \to \alpha x_i$ влечёт, что в инвариантном кольце выживают элементы с $\sum_{i \leq 5} m_i \in 5\mathbb{Z}$, то есть, с учётом ограничений на степень мономов, $m_i = 0$, $\sum_{i \leq 5} m_i = 5$, $\sum_{i \leq 5} m_i = 10, m_i = 3$. Размерность инвариантного кольца Милнора равняется размерности $\dim(H_3(\mathcal{Q})) = 204$. Таким образом, кольцо естественно разбивается в прямую сумму:

$$\mathcal{R}_0^Q = \mathcal{R}_0^0 \oplus \mathcal{R}_0^1 \oplus \mathcal{R}_0^2 \oplus \mathcal{R}_0^3, \tag{2.3.104}$$

где $\mathcal{R}^k$ состоит из полиномов степени $5k$. В частности, $\mathcal{R}^0 = \langle 1 \rangle$ и $\mathcal{R}^3 = \langle \prod_{i \leq 5} x_i^3 \rangle = \langle \mathrm{Hess}\, W_0 \rangle$. По определению

$$\mathcal{R}_0^1 = \langle x_1^{s_1} \cdots x_5^{s_5} \rangle_{s=1}^{101}, \quad \mathcal{R}_0^2 = \langle x_1^{3-s_1} \cdots x_5^{3-s_5} \rangle_{s=1}^{101}. \tag{2.3.105}$$

Обозначим базис кольца за $e_m(x) := x_1^{m_1} \cdots x_5^{m_5}$, $\sum_{i \leq 5} m_i = 0, 5, 10, 15$. Для достаточно малых деформаций те же мономы образуют базис и в деформированном кольце $\mathcal{R}^Q$. Аналогично случаю зеркальной квинтики те же мономы при умножении на каноническую форму объёма $\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^5$ составляют базис группы относительных когомологий $H^5_{D_-}(\mathbb{C}^5)^Q = \langle e_m(x)\, \mathrm{d}^5 x \rangle_{m=1}^{204}$.

По этому базису когомологий определим дуальный базис гомологий

$$\int_{\Gamma_+^m} e_n(x)\, e^{-W_0(x)} \mathrm{d}^5 x = \delta_n^m. \tag{2.3.106}$$

и периоды $\sigma_n(\phi)$ вдоль этих циклов. Последние вычисляются аналогично одномерному случаю с помощью рекурсии (2.3.53)

$$\sigma_a(\phi) := \int_{\Gamma_+^a} e^{-W(x,\phi)} \mathrm{d}^5 x =$$
$$= \sum_{m_1,\ldots,m_{101}\geq 0} \frac{\phi_1^{m_1}\cdots\phi_{101}^{m_{101}}}{m_1!\cdots m_{101}!} \int_{\Gamma_+^a} e^{-W_0(x)} \prod_{i\leq 5} x_i^{\sum_{s=1}^{101} m_s s_i} \mathrm{d}^5 x. \quad (2.3.107)$$

Разделим показатели под интегралом на 5 с остатком для удобства $\sum_s m_s s_i = 5n_i + k_i$. Используя рекурсию (2.3.53) получаем

$$\prod_{i\leq 5} x_i^{5n_i+k_i} \mathrm{d}^5 x \sim \prod_{i\leq 5} x_i^{5n_i+k_i} \mathrm{d}^5 x - D_-(\frac{1}{5} x_1^{5n_1+k_1-4} \prod_{2\leq i\leq 5} x_i^{5n_1+k_i} \mathrm{d}^5 x) =$$
$$= \frac{5n_1+k_1-4}{5} x_1^{5(n_1-1)+k_i} \prod_{2\leq i\leq 5} x_i^{5n_1+k_i} \mathrm{d}^5 x \quad (2.3.108)$$

Ту же редукцию можно провести по любому из n_i. Производя индукцию по n_i получаем

$$\prod_{i\leq 5} x_i^{5n_i+k_i} \mathrm{d}^5 x \sim \prod_{i\leq 5} \left(\frac{k_i+1}{5}\right)_{n_i} \prod_{i\leq 5} x_i^k = \prod_{i\leq 5} \frac{\Gamma\left(n_i + \frac{k_i+1}{5}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_i+1}{5}\right)} \prod_{i\leq 5} x_i^k. \quad (2.3.109)$$

Цикл Γ_+^a определён по формуле

$$\int_{\Gamma_+^a} e^{-W_0(x)} x_1^{k_1}\cdots x_5^{k_5} \,\mathrm{d}^5 x = \delta_{k_1}^{a_1}\cdots\delta_{k_5}^{a_5}. \quad (2.3.110)$$

Подставляя явное значение для интеграла в формулу для периодов (2.3.107) получаем

$$\sigma_a(\phi) = \prod_{i\leq 5}\left(\frac{a_i+1}{5}\right)_{n_i} \sum_{\sum_{s=1}^{101} m_s s_i = 5n_i + a_i} \frac{\phi_1^{m_1}\cdots\phi_{101}^{m_{101}}}{m_1!\cdots m_{101}!},$$
$$a = (a_1,\ldots,a_5),\ 0\leq a_i\leq 3, \sum_{i\leq 5} a_i = 0,\ 5,\ 10,\ 15. \quad (2.3.111)$$

Эти периоды также являются собственными функциями под действием группы фазовой симметрии (то есть лежат в её одномерном неприводимом представлении). Эти функции являются обобщёнными гипергеометрическими функциями от 101 переменной и удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям.

Голоморфная матрица пересечений Голоморфная обратная матрица пересечений циклов η^{ij} ищется тем же приёмом, что и в случае зеркальной квинтики. А именно с помощью формулы (2.3.85). В этой формуле не возникает перевальных поправок к вычету в правой части по той же самой причине, а именно спаривание в левой части является однородным степени 15 в присутствии переменной z, а все базисные формы лежат в различных одномерных представлениях группы фазовой симметрии. В итоге получаем формулу

$$\eta_{ab} = (-1)^{\sum_i b_i/5} \mathrm{Res} \frac{e_a(x)\, e_b(x)\, \mathrm{d}^5 x}{\partial_1 W_0 \cdots \partial_5 W_0}. \tag{2.3.112}$$

$\eta_{ab} = (-1)^{\sum_i b_i/5}$ если $a_i + b_i = 3$ для всех i и $\eta_{ab} = 0$ иначе. Пронумеруем базис так, чтобы матрица η была антидиагональной.

Матрица вещественной структуры: метод монодромии Благодаря тому, что все циклы обладают различными весами относительно группы фазовой симметрии можно воспользоваться формулой (2.3.95), откуда следует, что экспонента Кэлерова потенциала специальной метрики выражается диагонально через периоды $\sigma_a(\phi)$:

$$e^{-K} = \sum_{k=1}^{204} (-1)^{\sum_i k_i/5} A_k |\sigma_k(\phi)|^2. \tag{2.3.113}$$

$(-1)^{\sum_i k_i/5} A_k \delta_{kj} = \eta_k^l M_l^{\bar{j}}$, следовательно $M_j^{\bar{k}} = \delta_{j+k=205} A_k$. Из уравнения $M\bar{M} = 1$ получаем, что $A_k A_{205-k} = 1$, то есть имеются 102 независимых коэффициента. Более того, два из них уже известны, а именно для $j = (0,0,0,0,0)$ и $j = (1,1,1,1,1)$ из вычисления для зеркальной квинтики. Остаётся найти 100 коэффициентов A_k, которые соответствуют 100 деформациям (2,1,1,1,0), (2,2,1,0,0), (3,1,1,0,0), (2,1,1,1,0). Пусть t означает одну из этих деформаций или её перестановку. Тогда можно рассмотреть все периоды содержащие в своём разложении около нуля члены вида $\phi_t \phi_1^{m_1}$, где ϕ_1 соответствует деформации $(1,1,1,1,1)$ как и в случае зеркальной квинтики. Если период $\sigma_k(\phi)$ содержит такой член, это означает, что $k_i = t_i + c \bmod 5$ для всех i. Для каждого t из списка существует только два таких периода, два значения k, одно из них это t, второе мы обозначим t'. Таблица пар (t, t') приведена ниже

t	t'	(a, b)
(2,1,1,1,0)	(3,2,2,2,1)	(2/5,2/5)
(2,2,1,0,0)	(3,3,2,1,1)	(1/5,3/5)
(3,1,1,0,0)	(0,3,3,2,2)	(1/5,2/5)
(3,2,0,0,0)	(1,0,3,3,3)	(1/5,1/5)

Выпишем периоды $\sigma_t(\phi)$, $\sigma_{t'}(\phi)$ в первом порядке по ϕ_t, во всех порядках по максимально симметричной деформации ϕ_1 и при всех остальных деформациях равных нулю:

$$\sigma_t(\phi_t, \phi_1) = \phi_k\, {}_2F_1(a, b; a+b\,|\,(-\phi_1/5)^5) + O(\phi_t^6),$$
$$\sigma_{t'}(\phi_t, \phi_1) = \phi_t\, (-\phi_1)^{1-a-b}\, {}_2F_1(1-a, 1-b; 2-a-b\,|\,(-\phi_0/5)^5) + O(\phi_t^6), \tag{2.3.114}$$

где

$${}_2F_1(a, b; c|z) = \sum_n \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n \tag{2.3.115}$$

- гипергеометрическая функция Гаусса, а пары чисел a, b для каждого t приведены в таблице 2.3.2. Формула (2.3.114) получается как частный случай формулы (2.3.107), при этом ряд по ϕ_1 суммируется точно в гипергеометрическую функцию. Выражение для Кэлерова потенциала должно быть инвариантно при монодромии, в частности, при обходе ϕ_1 вокруг бесконечности. Мы проведём эту монодромию в первом порядке по ϕ_t и при вех остальных переменных равными нулю. Стандартная формула для гипергеометрических функций [47] даёт

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, \tag{2.3.116}$$

где

$$(F_1, F_2) = ({}_2F_1(a, b; a+b\,|\,(-\phi_1/5)^5), {}_2F_1(1-a, 1-b; 2-a-b\,|\,(-\phi_0/5)^5)) \tag{2.3.117}$$

и

$$B = \frac{1}{is(a+b)} \begin{pmatrix} c(a-b) - e^{i\pi(a+b)} & 2s(a)s(b) \\ 2e^{2\pi i(a+b)} s(a)s(b) & e^{\pi i(a+b)}[e^{2\pi ia} + e^{2\pi ib} - 2]/2 \end{pmatrix}. \tag{2.3.118}$$

То есть, под действием монодромии периоды σ_t и $\sigma_{t'}$ смешиваются друг с другом. При этом экспонента Кэлерова потенциала должна остаться неизменной:

$$e^{-K} = A_t |\sigma_t(\phi)|^2 + A_{t'} |\sigma_{t'}(\phi)|^2 + O(\phi_{k\neq t}) + O(\phi_t^2). \tag{2.3.119}$$

Для того, чтобы метрика была хорошо определена на пространстве модулей, она должна быть инваринтна относительно монодромии. В частности, после монодромии в выражении (2.3.119) должны отсутствовать диагональные члены $\sigma_t(\phi)\overline{\sigma_{t'}(\phi)}$ Явным вычислением (например, в Математике) проверяется, что это условие фиксирует $A_t/A_{t'}$ однозначно:

$$A_t/A_{t'} = -\prod_{i=1}^{5} \frac{\Gamma\left(\frac{t_i+1}{5}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{t'_i+1}{5}\right)^2} = -\prod_{i=1}^{5} \frac{\Gamma\left(\frac{t_i+1}{5}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{4-t_i}{5}\right)^2}. \tag{2.3.120}$$

Теперь воспользуемся симметрией S_5. Периоды, чьи циклы отличаются друг от друга перестановкой должны входить в формулу для потенциала с одинаковым коэффициентом. В то же время для каждого t из таблицы 2.3.2 можно найти $\tau \in S_5$ так, что $t_i = 3 - t'_{\tau_i}$. Тогда из условия $A_t A_p = 1$ если $t + p = (3,3,3,3,3)$ следует, что $A_t A_{t'} = 1$. С точностью до знака получаем

$$A_t = \pm \prod_{i=1}^{5} \frac{\Gamma\left(\frac{t_i+1}{5}\right)}{\Gamma\left(\frac{4-t_i}{5}\right)} = \pm \prod_{i=1}^{5} \gamma\left(\frac{k_i+1}{5}\right). \tag{2.3.121}$$

Знак фиксируется из условия Эрмитовости метрики $G_{i\bar{j}} = \partial_i \overline{\partial_j} K$ и знака при $|\sigma_{(0,0,0,0,0)}(\phi)|^2$ и оказывается "-".

Подставляя (2.3.107), и (2.3.121) в (2.3.113) получаем ответ для специальной геометрии на 101-мерном пространстве модулей квинтики:

$$e^{-K} = \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_5 \le 3, \\ \sum_i k_i = 0,5,10,15}} (-1)^{\sum_i k_i/5} \prod_{i \le 5} \gamma\left(\frac{k_i+1}{5}\right) |\sigma_{(k_1,\ldots,k_5)}(\phi)|^2. \tag{2.3.122}$$

Зеркальная симметрия в случае квинтики Мы нашли специальную Кэлерову геометрию на пространстве комплексных модулей трёхмерной квинтики и её зеркального образа как степенные ряды в окрестностях специальных точек в их пространствах модулей. Зеркальная симметрия утверждает, что это вычисление позволяет найти специальную геометрию на комплексных и Кэлеровых модулях как квинтики, так и её зеркального образа в некоторой области объединённых комплексных и Кэлеровых модулей.

Рассмотрим, например, квинтику $\mathcal{Q}$ с $h^{2,1} = 101$ и $h^{1,1} = 1$. Геометрия пространства комплексных модулей даётся формулой (2.3.122). Геометрия Кэлеровых модулей должна даваться формулой (2.3.98) при подходящем зеркальном отображении. Тут, однако, имеется тонкость, связанная с уже обсуждавшимися доменными стенками в пространстве Кэлеровых модулей, то есть с *фазами*. Дело в том, что пространство комплексных модулей одного многообразия изоморфно склейке пространств Кэлеровых модулей нескольких разных фаз. Феномен наличия множества фаз будет подробнее обсуждаться в третьей главе данной работы. Фазы, которые соответствуют квантовым когомологиям многообразий называются геометрическими фазами. В частности, для квинтики зеркальный образ геометрической фазы соответствует $\phi_1 \to \infty$ для её зеркального образа. Мы же получили ответ для $\phi_1 \to 0$. Эта область комплексного параметра соответствует так называемой фазе орбифолда Ландау-Гинзбурга [93]. В этой фазе место квантовых когомологий занимает теория Фана-Джарвиса-Руана-Виттена (FJRW) [38]. Зеркальное отображение задаётся формулой

$$t^1_{LG}(\phi_1) = \sigma_1(\phi_1)/\sigma_0(\phi_1), \tag{2.3.123}$$

где t^1 плоская (в метрике η^{ij}) естественная координата на Кэлеровых модулях в фазе Ландау-Гинзбурга. Чтобы получить специальную геометрию в геометричекой фазе, необходимо аналитически продолжить формулу (2.3.98) в область $\phi_1 \to \infty$ (что было сделано в оригинальной работе [23]).

То же самое верно для геометрии Кэлеровых модулей зеркльной квинтики. Область параметров $\phi_i \to 0$ соответствет фазе Ландау-Гинзбурга зеркальной квинтики, у которой теперь есть несколько геометрических фаз. В фазе Ландау-Гинзбурга зеркальное отображение задаётся аналогичной формулой

$$t^s_{LG}(\phi) = \sigma_s(\phi)/\sigma_{(00000)}(\phi_1), \tag{2.3.124}$$

где $s = (s_1, \ldots, s_5),\ 0 \leq s_i \leq 3, \sum_i s_i = 5$. Насколько известно автору, аналитическое продолжение для зеркальной квинтики не было сделано явно и является одним из направлений дальнейшей работы.

Стоит также отметить, что голоморфная матрица пересечений циклов $(\eta^{-1})^{ij} = \Gamma^i_+ \cap \Gamma^j_-$ является симплектической единицей с точностью до перестановки перенумерации периодов. С этой точки зрения базис γ^i циклов является "голоморфным" симплектическим базисом. Именно из-за этого зеркальное отображение в орбифолдной точке имеет вид (2.3.124).

2.3.3 Гиперповерхности Ферма

Трёхмерная квинтика является частным случаем так называемых гиперповерхностей Ферма, для которых вычисление специальной геометрии имеет примерно такую же сложность.

Трёхмерные гиперповерхности Ферма задаются уравнениями вида

$$W_0(x) = x_1^{n_1} + x_2^{n_2} + x_3^{n_3} + x_4^{n_4} + x_5^{n_5} = 0. \tag{2.3.125}$$

При различных (положительных целых) n_i полином $W_0(x)$ не является однородным, а потому его множество нулей не определено в $\mathbb{P}^4$. Тем не менее, полином W_0 является *взвешенным однородным*, то есть

$$W_0(\lambda^{1/n_i} x_i) = \lambda W_0(x). \tag{2.3.126}$$

Такой полином имеет хорошо определённое множество нулей во *взвешенном проективном пространстве* $\mathbb{P}^4_{(k_1,k_2,k_3,k_4,k_5)}$. Взвешенное проективное пространство определяется как

$$\mathbb{P}^4_{\bar{k}} = \mathbb{P}^4_{(k_1,k_2,k_3,k_4,k_5)} := \{x_i \in \mathbb{C}^5 \mid x_i \simeq \lambda^{k_i} x_i,\ \bar{x} \neq 0\}, \tag{2.3.127}$$

где k_i - целые положительные числа не имееющие нетривиального общего делителя, которые называются весами переменных x_i. Пусть целое число d будет наименьшим общим кратным степеней n_i, тогда нули полинома W_0 хорошо определены во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}^4_{\bar{k}}$ с $k_i := d/n_i$.

Взвешенные проективные пространства можно построить с помощью факторизации обычного проективного пространства $\mathbb{P}^4$. А именно,

$$\mathbb{P}^4_{(k_1,\dots,k_5)} = \mathbb{P}^4/\mathbb{Z}_{k_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{k_5}, \tag{2.3.128}$$

где $\mathbb{Z}_{k_i}$ действует на x_i умножениями на корни k_i степени из 1. Действительно, в качестве однородных координат на фактор-пространстве можно взять $y_i := x_i^{k_i}$. Тогда если $x_i \to \lambda x_i$, то $y_i \to \lambda^{k_i} y_i$. Из этой конструкции видно, что взвешенные проективные пространства могут иметь *орбифолдные* особенности, или особенности конечного фактора. Рассмотрим, например, двумерное пространство $\mathbb{P}^2_{(1,1,2)}$. Рассмотрим карту $x_3 = 1$. Тогда применяя калибровочное преобразование $x_i \to \lambda^{k_i} x_i$ с $\lambda = -1$ получаем, что $(x_1, x_2) \simeq (-x_1, x_2)$, то есть эта карта имеет вид $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^2$. Эту карту можно биголоморфно отобразить в $\mathbb{C}^3$ с координатами u, v, w по правилу $(x_1, x_2) \to (x_1^2, x_1 x_2, x_2^2)$. Тогда видно, что карта изоморфна квадратичному конусу $uw = v^2$. В принципе, чтобы работать с сингулярными многообразиями, сначала необходимо разрешить особенности, например применить *раздутие* к сингулярным локусам. Раздутие в локусе $V \subset X$ вырезает V и вклеивает на его место проективизацию его нормального расслоения $\mathbb{P}NV$ внутри X. В частности, при раздутии во взвешенном проективном пространстве появляются дополнительные циклы чётных размерностей, приводя к наличию большего числа Кэлеровых параметров в гиперповерхностях, но не затрагивают циклы нечётной размерности, каковыми являются $H_3(X)$.

Таким образом, изучая деформации комплексных структур на гиперповерхностях во взвешенных проективных пространствах, можно рассматривать средние гомологии и интегралы по циклам конечного фактора как если бы он являлся гладким многообразием (см. также работы по геометрии орбифолдов).

В этом случае условие гладкости на $W = 0$ заменяется на условие *квазигладкости* или трансверсальности на полином $W = 0$. Условие квазигладкости означает, что все сингулярности многообразия $W = 0$ возникают из пересечений поверхности $W = 0$ с фактор особенностями взвешенного проективного пространства. Это условие эквивалентно тому, что W_0 по-прежнему имеет изолированную особую точку в нуле, то есть

$$\mathrm{d}_1 W(x) = \dots = \mathrm{d}_5 W(x) = 0 \iff x = 0. \tag{2.3.129}$$

Изучим, когда такая гиперповерхность задаёт многообразие Калаби-Яу. Для этого можно либо воспользоваться обобщением формулы (2.3.8) (которую нужно использовать аккуратно ввиду сингулярности многообразий) либо, непосредственно предъявлением голоморфной формы объёма.

Форма объёма, как и в случае квинтики, выражается через двойной вычет пятимерной формы

$$\frac{\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_5}{W(x)}. \tag{2.3.130}$$

Чтобы форма выше была хорошо определена под действием тора $\mathbb{C}^*$ (то есть группы растяжений $x_i \to \lambda^{k_i} x_i$), вес сингулярности должен быть равен весу $x_1 \cdots x_5$, то есть если

$$W(\lambda^{k_i} x_i) = \lambda^d W(x), \tag{2.3.131}$$

то $d = \sum_i k_i$.

Из этой формулы понятно как искать гиперповерхности Калаби-Яу типа Ферма. Они должны задаваться полиномами

$$W_0(x) = \sum_{i=1}^{5} x_i^{n_i},\ n_i = d/k_i,\ \sum k_i = d. \tag{2.3.132}$$

Каждая такая поверхность соответствует набору чисел вида n_i так, что

$$\sum_{i \le 5} \frac{1}{n_i} = 1. \tag{2.3.133}$$

Таких наборов оказывается конечное число. Их легко найти все используя следующее замечание. Упорядочим n_i по убыванию: $2 \le n_1 \le n_2 \le \cdots \le n_5 < \infty$. Тогда n_1 ограничено сверху, а именно $n_1 \le 5$, поскольку в противном случае $\sum n_i^{-1} \le 5/n_i < 1$. Для каждого из четырёх возможных значений n_1 получим уравнение на $n_2, \ldots, n_5$ вида $\sum_{i \ge 2} n_i^{-1} = 1 - n_1^{-1}$. Тогда n_2 ограничено сверху числом $4/(1 - n_1^{-1})$. Классификация, таким образом, сводится к конечному перебору пятёрок чисел $n_1, \ldots n_5$ ограниченных сверху. Таких пятёрок оказывается 147. Тогда $d = \text{НОК}(n_1, \ldots, n_5)$ и $k_i = d/n_i$. Не все полученные гиперповерхности оказываются независимы. Имеется следующий изоморфизм взвешенных проективных пространств

$$\mathbb{P}^4_{(k_1, dk_2, dk_3, dk_4, dk_5)} \simeq \mathbb{P}^4_{(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)}. \tag{2.3.134}$$

Ввиду этого изоморфизма, из списка из 147 полиномов надо выкинуть такие, где четырё из пяти k_i содержат общий делитель. Тогда остаётся 97 различных взвешенных проективных пространства допускающих гиперповерхности Ферма, которые являются многообразиями Калаби-Яу. Большой список многообразий Калаби-Яу (в частности, гиперповерхностей Ферма) можно найти в [69].

Мы будем рассматривать семейства полиномиальных деформаций гиперповерхностей Ферма и найдём специальную геометрию на таких семействах:

$$W(x, \phi) = \sum_{i=1}^{5} x_i^{d/k_i} + \sum_{s=1}^{h^{2,1}_{poly}} \phi_s e_s(x), \tag{2.3.135}$$

где $e_s(x) := x_1^{s_1} \cdots x_5^{s_5}$ и выполняются условия невырожденности $0 \le s_i \le d/k_i - 2$ и однородности $\sum_i s_i k_i = d$. Условие невырожденности как и в случае квинтики означает, что деформации $e_s(x)$ в первом порядке по ϕ_s не являются координатными преобразованиями. Число $h^{2,1}_{poly}$ является числом полиномиальных (взвешеных) однородных деформаций особенности с точностью до координатных преобразований. Это число, в общем случае, меньше $h^{2,1}$, то есть не все деформации комплексной структуры реализуются как полиномиальные деформации уравнения во взвешенном проективном пространстве.

В общем случае, $h^{2,1}$ можно определить подсчётом точек *многогранника* или *политопа* взвешенного проективного пространства (см. также главу 3. Для $\mathbb{P}^4_{\bar{k}}$ многогранник $\Delta_{\bar{k}}$ является многогранником Ньютона для общего уравнения Калаби-Яу. То есть $\Delta_{\bar{k}}$ является многогранником в $\mathbb{R}^5$, который является *выпуклой оболочкой* показателей степеней $(s_1, \ldots, s_5)$ однородных мономов $x_1^{s_1} \cdots x_5^{s_5}$ степени d. Выпуклой оболочкой точек $p_1, \ldots, p_N$ называется множество $\sum_{i=1}^n l_i p_i,\ 0 \leq l_i \leq 1,\ \sum_i l_i = 1$. Этот многогранник является четырёхмерным, то есть лежит в гиперплоскости $\sum_{i=1}^5 x_i k_i = d$. Тогда обозначая за $l(\Gamma)$ число целых точек на грани Γ и за $l^*(\Gamma)$ число целых точек во внутренности Γ можно легко выразить [34] число $h^{2,1}_{poly}$:

$$h^{2,1}_{poly} = l(\Delta) - 5 - \sum_{\Gamma \text{ - грань коразмерности } 1} l^*(\Gamma). \tag{2.3.136}$$

Для многогранника $\Delta_{\bar{k}}$ есть дуальный (полярный) многогранник $\nabla_{\bar{k}}$ определяемый в дуальном пространстве $(\mathbb{R}^4)^* \simeq \mathbb{R}^5/\{y \sim y + const(k_1, \ldots, k_5)\}$ как

$$\nabla_{\bar{k}} := \{y \in (\mathbb{R}^4)^* \mid \langle y, x\rangle \geq -1\ \forall x \in \Delta_{\bar{k}}\}. \tag{2.3.137}$$

В частности, каждой грани Γ многогранника $\Delta_{\bar{k}}$ размерности k имеется дуальная грань L полярного многогранника $\nabla_{\bar{k}}$ размерности $4 - k$. Тогда общее количество деформаций комплексной структуры многообразия $\mathcal{X}$ выражается как

$$h^{2,1} = h^{2,1}_{poly} + \sum_{\Gamma \text{ - грань коразмерности } 2} l^*(\Gamma) l^*(L). \tag{2.3.138}$$

Эти формулы возникают в конструкции Батырева зеркальной симметрии и будут обсуждаться в главе 3.

Поскольку деформации комплексной структуры соответствуют элементам когомологий $H^{2,1}(\mathcal{X}_\phi)$, полиномиальные деформации образуют подгруппу когомологий $H^{2,1}_{poly}(\mathcal{X}_\phi) \subset H^{2,1}(\mathcal{X}_\phi)$. Вместе с $H^{1,2}_{poly} = \overline{H^{2,1}_{poly}}$, а также $H^{3,0}$ и $H^{0,3}$ эта группа образует подгруппу третьих гомологий $H^3_{poly}(\mathcal{X}_\phi) \subset H^3(\mathcal{X}_\phi)$. В этом разделе мы будем для краткости обозначать $h := h^{2,1}_{poly}$

Часть из дополнительных деформаций комплексной структуры может быть выражена полиномиальными деформациями в другой реализации $\mathcal{X}$ или в виде особых (неполиномиальных) деформаций [22], однако мы не будем обсуждать их в данной работе.

Суперпотенциал $W_0(x)$ обладает группой фазовой симметрии $\Pi_{W_0} = \mathbb{Z}_{d/k_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{d/k_5}$, действующей умножениями x_i на корни из единицы. Заметим, что группа квантовой симметрии, действующая тривиально на взвешенном проективном пространстве, $Q \simeq \mathbb{Z}_d$ вложена в группу фазовой симметрии как $x_i \to e^{2\pi i k_i/d} x_i$. Гиперповерхности Ферма также являются орбифолдными точками в пространствах модулей деформаций комплексных структур.

В аффинных картах на гиперповерхностях Ферма $\mathcal{X}_\phi = \{W(x, \phi) = 0\}$ голоморфная форма объёма даётся формулой

$$\Omega_\phi = \epsilon^{ijklm} \frac{x_i \mathrm{d}x_j \mathrm{d}x_k \mathrm{d}x_l}{\partial W(x, \phi)/\partial x_m}. \tag{2.3.139}$$

Мы по-прежнему будем использовать представление периодов как интегралов 5-формы по торическим трубчатым окрестностям трёхмерных циклов, а именно

$$\int_\gamma \Omega_\phi = \int_{T(\gamma)} \frac{\mathrm{d}^5 x}{W(x, \phi)}. \tag{2.3.140}$$

Как отмечалось выше, деформации комплексных структур (в частности периоды) не чувствуют орбифолдные сингулярности пространства $\mathcal{X}_\phi$.

Вычисление периодов можно провести через осциллирующие интегралы аналогично случаю квинтики. Отличием является то, что поскольку инвариантное кольцо Милнора $\mathcal{R}^Q$ порождается единицей и полиномиальными деформациями $W_0(x)$, группа относительных когомологий $H^5_{D_-}(\mathbb{C}^5)$ оказывается изоморфна не всей группе третьих когомологий гиперповерхности Ферма, а только полиномиальной подгруппе $H^3_{poly}(\mathcal{X}_\phi)$. Тогда если $\gamma \in H^3_{poly}(\mathcal{X}_\phi)$, то соответствующий период выражается осциллирующим интегралом

$$\int_\gamma \Omega_\phi = \int_{\Gamma_+} e^{-W(x,\phi)} \mathrm{d}^5 x. \tag{2.3.141}$$

В качестве циклов интегрирования вновь выберем циклы собственные относительно действия группы фазовой симметрии. Инвариантное кольцо Милнора в точке $\phi = 0$ допускает разложение Ходжа

$$\mathcal{R}_0^Q = (\mathcal{R}_0^Q)^0 \oplus (\mathcal{R}_0^Q)^1 \oplus (\mathcal{R}_0^Q)^2 \oplus (\mathcal{R}_0^Q)^3, \tag{2.3.142}$$

где $R^0 = \langle 1 \rangle$ и $R^3 = \langle \mathrm{Hess} W_0 \rangle = \langle x_1^{d/k_1 - 2} \cdots x_5^{d/k_5 - 2} \rangle$, а R^1 и R^2 порождаются $e_a(x) = x_1^{a_1} \cdots x_5^{a_5},\ a_i \leq d/k_i - 2,\ \sum_i k_i a_i = d$ и $2d$ соответственно. Тогда в качестве естественных собственных относительно фазовой симметрии базисов групп относительных гомологий и когомологий можно выбрать $H^5_{D_-}(\mathbb{C}^5) = \langle e_a(x)\, \mathrm{d}^5 x \rangle_{a=1}^{2h+2}$ и

$$\int_{\Gamma_+^b} e_a(x) e^{-W(x,\phi)} \mathrm{d}^5 x = \delta_a^b. \tag{2.3.143}$$

Вычисление периодов в базисе Γ_+^a проводится аналогично случаю квинтики

$$\sigma_a(\phi) := \int_{\Gamma_+^a} e^{-W(x,\phi)} \mathrm{d}^5 x = \\ = \sum_{m_1,\dots,m_h\geq 0} \frac{\phi_1^{m_1}\cdots\phi_h^{m_h}}{m_1!\cdots m_h!} \int_{\Gamma_+^a} e^{-W_0(x)} \prod_{i\leq 5} x_i^{\sum_{s=1}^h m_s s_i} \mathrm{d}^5 x. \quad (2.3.144)$$

Выделим из показателей под интегралом остатки по модулям $d/k_i \sum_s m_s s_i = d/k_i n_i + a_i$. Используя рекурсию (2.3.53) получаем

$$\prod_{i\leq 5} x_i^{d/k_i n_i + a_i} \mathrm{d}^5 x \sim \prod_{i\leq 5} x_i^{d/k_i n_i + a_i} \mathrm{d}^5 x - D_-(\frac{k_i}{d} x_1^{d/k_i n_1 + a_1 - d/k_i + 1} \prod_{2\leq i\leq 5} x_i^{d/k_i n_1 + a_i} \mathrm{d}^5 x) = \\ = \frac{d/k_i(n_1-1)+a_1+1}{d} x_1^{d/k_i(n_1-1)+a_i} \prod_{2\leq i\leq 5} x_i^{d/k_i n_1 + a_i} \mathrm{d}^5 x \quad (2.3.145)$$

Ту же редукцию можно провести по любому из n_i. Производя индукцию по n_i получаем

$$\prod_{i\leq 5} x_i^{d/k_i n_i + a_i} \mathrm{d}^5 x \sim \prod_{i\leq 5} \left(\frac{k_i(a_i+1)}{d}\right)_{n_i} \prod_{i\leq 5} x_i^{a_i} = \prod_{i\leq 5} \frac{\Gamma\left(n_i + \frac{k_i(a_i+1)}{d}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_i(a_i+1)}{d}\right)} \prod_{i\leq 5} x_i^{a_i}. \quad (2.3.146)$$

Подставляя явное значение для интеграла в формулу для периодов (2.3.144) получаем

$$\sigma_a(\phi) = \prod_{i\leq 5} \left(\frac{k_i(a_i+1)}{d}\right)_{n_i} \sum_{\sum_{s=1}^h m_s s_i = d/k_i n_i + a_i} \frac{\phi_1^{m_1}\cdots\phi_h^{m_h}}{m_1!\cdots m_h!}, \\ a = (a_1,\dots,a_5),\ 0\leq a_i \leq d/k_i - 2, \sum_{i\leq 5} k_i a_i = 0,\ d,\ 2d,\ 3d. \quad (2.3.147)$$

Аналогичные формулы полученные другим способом можно встретить в математической литературе [57].

Благодаря фазовой симметрии спаривание (ко)циклов $(-1)^{\sum_i k_i b_i/d}\eta_{ab}$ равняется вычету

$$\eta_{ab} = \mathrm{Res} \frac{e_a(x) e_b(x)\, \mathrm{d}^5 x}{\partial_1 W_0(x) \cdots \partial_5 W_0(x)}. \quad (2.3.148)$$

В базисе

$$e_1(x) = 1,\, e_s(x) = \prod_i x_i^{s_i}, \\ e_{1+2h-s}(x) = \prod_i x_i^{d/k_i - 2 - s_i},\ e_{2+2h}(x) = \prod_i x_i^{d/k_i - 2} \quad (2.3.149)$$

спаривание является антидиагональной матрицей

$$\eta_{ab} = (-1)^{\sum_i k_i b_i/d} \delta_{a+b,2h+3}. \tag{2.3.150}$$

Вещественная структура и циклы Лефшеца Во всех случаях, рассматриваемых в этой работе, можно вычислить интегралы по настоящим (целочисленным) циклам а группе относительных когомологий $H_5(\mathbb{C}^5, \mathrm{Re}(W_0) >> 0; \mathbb{Z})$ перед взятием инвариантной поддгруппы. Такие циклы являются циклами Лефшеца (или их пределами в вырожденной особой точке W_0). При вычислении осциллирующих интегралов вида (2.3.144) разложением в ряд по параметрам дефомации возникают интегралы вида

$$\int_\Gamma e^{-\sum_i x_i^{d/k_i}} \prod_{i\leq 5} x_i^{b_i} \, \mathrm{d}^5 x, \tag{2.3.151}$$

где мы не специфицировали цикл интегрирования Γ. Подынтегральная функция факторизуется в произведение

$$\int_\Gamma \left(\prod_{i\leq 5} e^{-x_i^{d/k_i}} x_i^{b_i} \, \mathrm{d}x_i \right). \tag{2.3.152}$$

Такой интеграл берётся через произведение одномерных интегралов в случае, если цикл интегрирование также факторизуется в произведение одномерных $\Gamma = \gamma_1 \times \cdots \times \gamma_5$. Такие циклы в группе $H_5(\mathbb{C}^5, \mathrm{Re}(W_0) >> 0; \mathbb{Z})$ действительно можно построить.

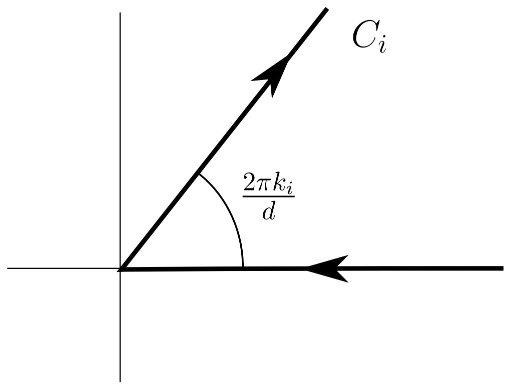


Рис. 2.4: Одномерные циклы Лефшеца

рассмотрим одномерный интеграл вида

$$\int_C e^{-x_i^{d/k_i}} x_i^{b_i} \, \mathrm{d}x_i. \tag{2.3.153}$$

Базис циклов $H_1(\mathbb{C}, \mathrm{Re}(x_i^{d/k_i}) >> 0; \mathbb{Z})$ можно выбрать из "углов", то есть циклов вида

$$C_a^i := \alpha^{k_i a}\mathbb{R}_+ - \alpha^{k_i(a-1)}\mathbb{R}_+, \tag{2.3.154}$$

где $\alpha = exp(2\pi i/d)$ и $\mathbb{R}_+$ - вещественная полуось с канонической ориентацией. Такие циклы линейно зависимы, $\sum_{a=1}^{d/k_i} C_a^i = 0$, то есть стягивается. Любые $d/k_i - 1$ циклов из набора образуют базис соответствующей группы гомологий, которая, таким образом, имеет размерность $d/k_i - 1$. Интеграл (2.3.153) берётся с помощью замены $x_i^{d/k_i} \to t$:

$$\int_{C_a^i} e^{-x_i^{d/k_i}} x_i^{b_i} \mathrm{d}x_i = \frac{k_i}{d}(\alpha^{k_i a(b+1)} - \alpha^{k_i(a-1)(b+1)})\Gamma\left(\frac{k_i(b_i+1)}{d}\right) =$$
$$= \alpha^{k_i a(b+1)}\frac{k_i}{d}(1-\alpha^{-k_i(b+1)})\Gamma\left(\frac{k_i(b_i+1)}{d}\right). \tag{2.3.155}$$

Пятимерный цикл C_+ строится как произведение таких циклов с разными углами поворота $C_+^a := C_{a_1}^1 \times \cdots C_{a_5}^5$. Интеграл по такому циклу равняется

$$\begin{gathered}\int_{C_+^a} e^{-\sum_i x_i^{d/k_i}} \prod_{i\le 5} x_i^{b_i}\, \mathrm{d}^5 x = \alpha^{\langle a,(b+1)\rangle} A(b),\\ A(b) = \prod_{i\le 5}\frac{k_i}{d}(1-\alpha^{-k_i(b+1)})\Gamma\left(\frac{k_i(b_i+1)}{d}\right)\end{gathered} \tag{2.3.156}$$

Сравниявая с определением инвариантных относительно монодромии циклов $\sigma_v(\phi)$ (2.3.144) выписывается матрица перехода $\omega_a(\phi) = T_a^b \sigma_b(\phi)$:

$$T_a^b = \alpha^{\langle a,(b+1)\rangle} A(b). \tag{2.3.157}$$

Для такой матрицы легко найти обратную, используя тождество для корней из 1

$$\sum_{j=1}^{d/k_i - 1} \alpha^{mk_i} = -1, \text{ если } m \neq 0 \bmod d/k_i. \tag{2.3.158}$$

Обратная матрица перехода оказывается равной

$$(T^{-1})_b^c = \prod_{i\le 5}\frac{d}{k_i}\left[\bar{\alpha}^{\langle a,(b+1)\rangle} - 1\right] A^{-1}(b). \tag{2.3.159}$$

Матрица вещественной структуры $M_b^c = (T^{-1})_b^a \overline{T_a^c}$ равняется

$$\begin{aligned} M_b^c = \prod_{i\le 5}\frac{d}{k_i}\frac{\overline{A(c)}}{A(b)}\sum_a\left(\bar{\alpha}^{a(b+c+2)} - \bar{\alpha}^{a(c+1)}\right) = \\ = \prod_{i\le 5}\delta_{b_i+c_i+2, d/k_i}\gamma\left(\frac{k_i(c_i+1)}{d}\right).\end{aligned} \tag{2.3.160}$$

В частности, как и должно быть из требований монодромии, эта матрица в нашем базисе имеет антидиагональный вид.

Подставляя значения матрицы голоморфных пересечений (2.3.150), матрицы вещественной структуры (2.3.160) и периодов (2.3.144) в формулу для экспоненты Кэлерова потенциала (2.3.72) получаем

$$e^{-K} = \sum_{\substack{a_i \le d/k_i - 2 \\ \sum_i k_i a_i = 0, d, 2d, 3d}} (-1)^{\sum_i k_i a_i / d} \prod_{i=1}^{5} \gamma\left(\frac{k_i(a_i+1)}{d}\right) |\sigma_a(\phi)|^2. \qquad (2.3.161)$$

При $k_i = 1,\ d = 5$ эта формула воспроизводит формулу Кэлерова потенциала для квинтики (2.3.122).

Ограничениями формулы (2.3.161) на подпространства параметров мы получаем известные в литературе вычисления как частные случаи [21,24,64].

2.3.4 Обратимые особенности: случай Берглунда-Хубша

В этом разделе мы рассмотрим специальную геометрию на пространстве деформаций комплексных структур многообразий Калаби-Яу задаваемых гиперповерхностями во взвешенных проективных пространствах, для которых уравнение гиперповерхности задаётся в однородных координатах обратимой особенностью. Обратимая особенность это особенность вида

$$W_0(x) = \sum_{i=1}^{5} \prod_{j=1}^{5} x_j^{M_{ij}}, \qquad (2.3.162)$$

где матрица $M = \{M_{ij}\}_{i,j\le 5}$ из целых неотрицательных чисел является обратимой. Гиперповерхности Ферма, рассматриваемые в предыдущем разделе, являются частным случаем обратимых особенностей с диагональной матрицей M. Обозначим обратную матрицу как $M^{-1} = \{(M^{-1})_{ij}\}_{i,j\le 5}$. Обратимые особенности обладают большой группой фазовой симметрии Π_{W_0}, и, в частности, являются взвешенными однородными, как можно увидеть из следующей формулы.

$$W_0(\lambda_k^{(M^{-1})_{jk}} x_j) = \sum_{i=1}^{5} \prod_{j=1}^{5} x_j^{M_{ij}} \lambda_k^{M_{ij} M_{jk}^{-1}} = \sum_{i=1}^{5} \lambda^i \prod_{j=1}^{5} x_j^{M_{ij}}. \qquad (2.3.163)$$

При $\lambda_1 = \cdots = \lambda_5$ из суммы выносится общий множитель, то есть веса квазиоднородности выражаются по формуле $k_i = d\sum_j (M_{ij}^{-1})$, где d является наименьшим общим знаменателем $\sum_j (M_{ij}^{-1})$. Произвольный элемент группы фазовой симметрии $g \in \Pi_{W_0}$ действует как $g \cdot x_i = e^{2\pi\sqrt{-1} g_i} x_i$, где

$$g_i = (M^{-1})_{ij} n_j,\ n_j \in \mathbb{Z}. \qquad (2.3.164)$$

Мы дадим более полное описание фазовой симметрии, когда обсудим классификацию обратимых особенностей. Решения уравнения $W_0(x) = 0$ хорошо определены во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}^4_{(k_1,\ldots,k_5)}$. Для того, чтобы нули $W_0(x)$ определяли квазигладкое многообразие Калаби-Яу, должны выполняться условия невырожденности и однородности, как и в случае гиперповерхностей Ферма. Условие невырожденности является условием трансверсальности на полином $W_0(x)$

$$\mathrm{d}W_0(x) = 0 \iff x = 0. \tag{2.3.165}$$

Это условие гарантирует, что все особенности гиперповерхности $\mathcal{X}_0 = \{W_0(x) = 0\} \subset \mathbb{P}^4_{\bar{k}}$ получаются из фактор особенностей в $\mathbb{P}^4_{\bar{k}}$. Как обсуждалось в случае гиперповерхностей Ферма, такие особенности не влияют на $H_3(\mathcal{X})$, а потому мы можем их игнорировать при изучении комплексных модулей и эффективно считать $\mathcal{X}_0$ гладким.

Условие однородности гарантирует наличие голоморфной формы объёма и выражается как условие того, что моном $x_1 \cdots x_5$ имеет степень d, то есть $\sum_{i,j\leq 5}(M^{-1})_{ij} = 1$. Тогда голоморфная форма объёма записывается через двойной вычет формы

$$\frac{\mathrm{d}^5 x}{W_0(x)}, \tag{2.3.166}$$

и по построению не имеет нулей и полюсов на $\mathcal{X}_0$. Условие однородности гарантирует хорошо определённость вычета этой формы на проективном пространстве.

Зеркальные образы для таких многообразий были найдены Берглундом и Хубшем в [14] и определяются фактором гиперповерхности заданной обратимой особенностью с транспонированной матрицей по подгруппе группы фазовой симметрии.

Пространство (полиномиальных) деформаций комплексной структуры моделируется семейством

$$W(x,\phi) = W_0(x) + \sum_{s=1}^{h^{2,1}_{poly}} \phi_s e_s(x), \tag{2.3.167}$$

где $h^{2,1}_{poly}$ - это число независимых полиномиальных деформаций комплексной структуры, а $e_s(x) \in \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_5]/(\partial_i W_0)$ - базис в пространстве однородных деформаций невырожденных в первом порядке. Не все деформации реализуются в виде полиномиальных, поэтому имеются вложения групп $H^{2,1}_{poly}(\mathcal{X}_\phi) \subset H^{2,1}(\mathcal{X}_\phi)$ и $H^3_{poly}(\mathcal{X}_\phi) \subset H^3(\mathcal{X}_\phi)$, где полиномиальные подгруппы порождаются свёртками дифференциалов Бельтрами, соответствующих полиномиальным деформациям, с голоморфной формой объёма и её комплексно сопряжённой.

Периоды выражаются через осциллирующие интегралы

$$\int_\gamma \Omega_\phi = \int_{\Gamma_+} e^{-W(x,\phi)} \mathrm{d}^5 x, \tag{2.3.168}$$

но их явное вычисление несколько сложнее. Воспользуемся классификацией обратимых особенностей, сделаной в работе [69]. Пусть $W_1(x_1, \ldots, x_a)$ и $W_0(x_{a+1}, \ldots, x_{a+b})$ будут двумя взвешенными однородными трансверсальными особенностями. Тогда их прямая сумма $W(x_1, \ldots, x_{a+b}) := W_1 + W_2$ также определяет взвешенную однородную невырожденную особенность, и группа фазовой симметрии новой особенности равняется произведению фазовых симметрий слагаемых.

Крёйцер и Скарке [69] обобщили классификацию особенностей, проведённую Арнольдом, показав, что любая обратимая особенность, которая является трансверсальной, раскладывается в прямую сумму одного из трёх строительных блоков

$$\begin{aligned} x^a &\text{ - точка,} \\ x_1^{a_1} x_2 + x_2^{a_2} x_3 + \cdots + x_n^{a_n} &\text{ - цепь,} \\ x_1^{a_1} x_2 + x_2^{a_2} x_3 + \cdots + x_n^{a_n} x_1 &\text{ - петля.} \end{aligned} \tag{2.3.169}$$

Полиномы типа Ферма являются суммой пяти “точек”. Чтобы изучить общую трансверсальную обратимую особенность, мы изучим каждый из этих трёх типов.

В дальнейшем будут много использоваться обратные матрицы M^{-1}_{ij}. Для каждого из трёх типов обратные матрицы имеют явный вид, который мы для удобства выпишем.

Ферма: $M = a$, $M^{-1} = a^{-1}$.

Цепь длины n:

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^{n} a_i \, E_{i,i} + \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}, \\ M^{-1} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} (-1)^{i+j} \prod_{k=i}^{j} a_k^{-1} \, E_{ij} \end{aligned} \tag{2.3.170}$$

где E_{ij} - матричная единица, то есть $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$.

Петля длины n:

$$M = \sum_{i=1}^{n} a_i\ E_{i,i} + \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1} + E_{n,1},$$

$$M^{-1} = \sum_{i \le n, j \ge i} \frac{\prod_{k<i} a_k \prod_{k>j} a_k}{(-1)^{n+1} + \prod_{k=1}^{n} a_k} (-1)^{i+j} E_{ij} + \tag{2.3.171}$$

$$+ \sum_{i \le n, j<i} \frac{\prod_{i<k<j} a_k}{(-1)^{n+1} + \prod_{k=1}^{n} a_k} (-1)^{i+j} E_{ij}$$

где произведение по пустому множеству равно нулю.

Инвариантное кольцо Милнора и фазовая симметрия Для начала, мы хотим описать структуру пространства состояний теории $\mathcal{R}_0^Q$, которое изоморфно пространству полиномиальных (ко)гомологий. Такие кольца были изучены, в частности, в [67]. До взятия инвариантного подпространства относительно фазовой симметрии очевидно, что обычное кольцо Милнора двух особенностей является тензорным произведением колец Милнора исходных особенностей. Инвариантное кольцо Милнора обратимой особенности является инвариантным подпространством тензорного произведения колец Милнора входящих в особенность строительных блоков. Следующее утверждение (принадлежащее оригинально Крёйцеру [68]) описывает инвариантные кольца Милнора каждого из блоков

1. Точка, $W_0(x) = x^a$,

$$\mathcal{R}_0 = \langle x^k \rangle_{k=0}^{a-2} \tag{2.3.172}$$

   Элемент наибольшей степени в кольце имеет единственное представление $e_\rho(x) = x^{a-2}$.

2. Цепь, $W_0(x) = x_1^{a_1} x_2 + x_2^{a_2} x_3 + \cdots + x_n^{a_n}$. Один из удобных способов выбора базиса заключается в следующем рекуррентном определении

$$\mathcal{R}_0 = \bigoplus \langle x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} \rangle, \tag{2.3.173}$$

   где или

   1) $k_1 \le a_1 - 2$ и $k_i \le a_i - 1$ для $i > 0$, или

   2) $k_1 = a_1 - 1,\ k_2 = 0$ и $x_3^{k_3} \cdots x_n^{k_n}$ образуют базисный элемент цепи $x_3^{a_3} x_4 + x_4^{a_4} x_5 + \cdots + x_n^{a_n}$. Элемент старшей степени можно представить как $e_\rho(x) = x_1^{a_1-2} \prod_{i=2}^{n} x_i^{a_i}$, однако это представление не единственно, например, имеется представление $e_\rho(x) = x_1^{2a_1-2} x_3^{a_3-2} \prod_{i=4}^{n} x_i^{a_i}$.

3. Петля, $W_0(x) = x_1^{a_1}x_2 + x_2^{a_2}x_3 + \cdots + x_n^{a_n}x_1$.

$$\mathcal{R}_0 = \bigoplus_{k_i=0}^{a_i-1} \langle x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}\rangle, \tag{2.3.174}$$

Элемент старшей степени представляется как $e_\rho(x) = \prod_i x_i^{a_i-1}$. Как и в случае цепи, это представление не единственно.

Группа фазовой симметрии особенности является произведением групп фазовой симметрии её компонент, при этом для каждого из трёх базовых блоков группа фазовой симметрии оказывается изоморфна произведению групп порождённых

$$x_j \to \exp(2\pi\sqrt{-1}M_{ja}^{-1})x_j, \tag{2.3.175}$$

где обратные матрицы заданы формулами (2.3.170). (2.3.171). Отметим также, что для цепи $\det M = a_1a_2\cdots a_n$, а для петли $\det M = a_1a_2\cdots a_n - (-1)^n 1$. Для петель число базисных элементов кольца Милнора равно $a_1a_2\cdots a_n$, и в случае чётного n преобразований фазовой симметрии оказывается не достаточно для того, чтобы различить все базисные элементы кольца Милнора. Два элемента с одинаковым весом относительно кольца Милнора имеют вид $\prod_{i=2k-1} x_i^{a_i-1}$ и $\prod_{i=2k} x_i^{a_i-1}$. Для цепи элементы кольца Милнора имеют различные веса под действием фазовой симметрии, но мономы вида $x_1^{a_1}\prod_{i\geq 3} x_i^{k_i}$ приводят к усложнениям.

В рамках этой работы мы не будем обсуждать деформации многообразий Калаби-Яу возникающие из таких элементов колец Милнора. Как мы выясним, эти усложнения приводят к более сложным формулам для периодов. Для того, чтобы самосогласованно выкинуть такие элементы из инвариантного кольца Милнора, нам также необходимо выкинуть все элементы, в произведении которых содержатся запрещённые мономы вида $\prod_{i=2k-1} x_i^{a_i-1}$ и $\prod_{i=2k} x_i^{a_i-1}$ для петли чётной длины и $x_1^{a_1}\prod_{i\geq 3} x_i^{k_i}$ для цепи. То есть мы будем рассматривать только деформации лежащие в кольце

$$\tilde{\mathcal{R}}_0 \subset \mathcal{R}_0, \tag{2.3.176}$$

которое является максимальным подкольцом не содержащим запрещённые мономы. Заметим также, что для случая полиномов состоящих только из блоков типа Ферма и петель нечётной длины запрещённых мономов нет, то есть $\tilde{\mathcal{R}}_0 = \mathcal{R}_0$.

После того, как мы выкинули эти элементы, выберем собственный относительно симметрии базис $e_a(x)$ в кольце Милнора $\tilde{\mathcal{R}}_0$.

Группы когомологий как пространства состояний теории Ландау–Гинзбурга Обсудим несколько более детально группы когомологий, появлявшиеся в предыдущих вычислениях. Кольцо Милнора $\mathcal{R}_0$ естественно изоморфно группе когомологий

$$\frac{\Omega^5(\mathbb{C}^5)}{\mathrm{d}W \wedge \Omega^4(\mathbb{C}^5)} \tag{2.3.177}$$

Изоморфизм даётся умножением на форму объёма минимальной степени d^5x. Кольцо Милнора действует на этой группе умножениями на класс эквивалентности полинома, и это действие хорошо определено. Именно на этой группе когомологий естественно определено спаривание вычета

$$\eta_{ab} = \eta(e_a(x)\,\mathrm{d}^5x, e_b(x)\,\mathrm{d}^5x) = \mathrm{Res}\frac{e_a(x)\,e_b(x)\,\mathrm{d}^5x}{\partial_1 W_0(x)\cdots\partial_5 W_0(x)}. \tag{2.3.178}$$

Кольцо Милнора и эта группа естественно отождествляются с киральным кольцом теории Ландау-Гинзбурга.

С другой стороны, имеется группа относительных когомологий.

$$H^5_{D_z}(\mathbb{C}^5) := \frac{\Omega^5(\mathbb{C}^5)}{(z\mathrm{d} - \mathrm{d}W\wedge)\Omega^4(\mathbb{C}^5)}. \tag{2.3.179}$$

Эта группа которая также изоморфна кольцу Милнора, но "калибровочная инвариантность" отличается, из-за чего кольцо Милнора не действует на этой группе. Её можно понимать, как пространство состояний теории Ландау-Гинзбурга с гравитацией [72]. При этом состояния вида $z^k e_a(x)$ (которые переписываются с помощью дифференциала D_z через полиномы старшей степени) отождествляются с гравитационными потомками.

Как в предыдущих примерах, эта группа дуальна группе гомологий

$$\mathscr{H}^z_5 := H_5(\mathbb{C}^5, \mathrm{Re}(W_0/z) >> 0; \mathbb{Z}). \tag{2.3.180}$$

В этой группе можно выбрать базис циклов с комплексными коэффициентами $\Gamma^a_+ \in \mathscr{H}^z_5 \otimes \mathbb{C}$ по дуальности с формами $e_b(x)\,\mathrm{d}^5x$, и соответствующий базис $\Gamma^a_- \in \mathscr{H}^{-z}_5 \otimes \mathbb{C}$.

На группе когомологий $H^5_{D_z}(\mathbb{C}^5)$ также имеется естественное спаривание (осциллирующих интегралов):

$$\begin{aligned} K^{W_0}_{ab} &:= K^{W_0}(e_a(x)\,\mathrm{d}^5x, e_b(x)\,\mathrm{d}^5x) = \\ &= \sum_c \int_{\Gamma^c_+} e_a(x) e^{-W_0(x)/z} \mathrm{d}^5x \int_{\check{\Gamma}^c_-} e_b(x) e^{W_0(x)/z} \mathrm{d}^5x, \end{aligned} \tag{2.3.181}$$

где $\Gamma^a_+ \cap \check{\Gamma}^b_- = \delta^{ab}$. Это спаривание называется спариванием высших вычетов [77, 83], где терминология обусловлена формулой (2.3.85), то есть спаривания $z^{-5}K^{W_0}_{ab}$ и η_{ab} совпадают в старшем порядке по z при очевидном вложении группы (2.3.177) в $H^5_{D_z}(\mathbb{C}^5)$.

Во всех предыдущих примерах старшие перевальные поправки исчезали ввиду наличия группы фазовой симметрии. Проведём рассуждение, что это выполняется и в общем случае обратимой особенности.

Спаривание (2.3.181) (взвешенное) однородное степени 5d, если присвоить z степень d, чтобы скомпенсировать степень показателя экспоненты под интегралом. Можно выбрать любое преобразование $g \in \Pi_{W_0}$ из группы фазовой симметрии, $g(e_a(x), \mathrm{d}^5x) = g_a e_a(x)\,\mathrm{d}^5x$, и провести замену координат под интегралами в (2.3.181) с результатом

$$K_{ab}^{W_0} = g_a g_b \sum_c \int_{g(\Gamma_+^c)} e_a(x) e^{-W_0(x)/z} \mathrm{d}^5x \int_{g(\check{\Gamma}_-^c)} e_b(x) e^{W_0(x)/z} \mathrm{d}^5x. \qquad (2.3.182)$$

Поскольку фазовая симметрия не меняет матрицу пересечений циклов, то можно заменить суммирование по циклам $g(\Gamma_+^c)$ и $g(\check{\Gamma}_-^c)$ на Γ_+^c и $\check{\Gamma}_-^c$. Тогда если $g_a g_b \neq 1$, то $K_{ab}^{W_0} = 0$. Используя явный вид колец $\mathcal{R}_0$ для каждого из трёх блоков $W_0(x)$ показывается, что $g_a g_b \neq 0$ только когда $\eta_{ab} \neq 0$, в частности, сумма весов $e_a(x)$ и $e_b(x)$ равна весу $\mathrm{Hess}(W_0)$, то есть сумма весов $e_a(x)\,\mathrm{d}^5x$ и $e_b(x)\,\mathrm{d}^5x$ равна $5d$. Перевальные поправки к $K_{ab}^{W_0}$ имеют вид $O(z^{-6})$, а потому в силу однородности спаривания вес $e_a(x)e_b(x)$ оказывается больше веса Гессиана, а потому $g_a g_b \neq 1$, то есть спаривание оказывается равно нулю.

В частности, полагая $z = 1$ получаем формулу для голоморфного спаривания циклов $\Gamma_+^k \cap \Gamma_-^l = (\eta^{-1})^{kl}$:

$$\eta_{ik} \int_{\Gamma_+^i} e^{-W_0(x)} e_j(x)\,\mathrm{d}^5x \int_{\Gamma_-^k} e^{W_0(x)} e_l(x)\,\mathrm{d}^5x = \mathrm{Res} \frac{e_j(x) e_l(x)\,\mathrm{d}^5x}{\partial_1 W_0 \cdots \partial_5 W_0}. \qquad (2.3.183)$$

Периоды Чтобы найти периоды инвариантные относительно монодромии

$$\sigma_a(\phi) := \int_{\Gamma_+^a} e^{-W(x,\phi)} \mathrm{d}^5x \qquad (2.3.184)$$

непосредственно тем же способом, как и в предыдущих примерах, необходимо приложить несколько больше усилий.

Чтобы вычислить период мы также разложим экспоненту под интегралом в ряд по параметрам деформации. Тогда задача о нахождении периодов сводится к нахождению интегралов вида

$$\int_{\Gamma_+^a} e^{-W_0(x)} \prod_{i \le 5} x_i^{b_i}\,\mathrm{d}^5x. \qquad (2.3.185)$$

Мы будем по-прежнему пользоваться приёмом рекуррентного понижения степени полинома в дифференциальных формах $\prod_{i\le 5} x_i^{b_i}\,\mathrm{d}^5x$ в когомологиях

$H^5_{D_-}(\mathbb{C}^5)$ путём прибавления D_- точных членов. Эту процедуру можно проводить в каждом из блоков, составляющих $W_0(x)$ по-отдельности, что и будет описано ниже.

В случае "точки" $W_0(x) = x^a$ вычисление уже было проделано в примере гиперповерхностей Ферма (2.3.146) с результатом

$$x^{am+k}\mathrm{d}x = \left(\frac{k+1}{a}\right)_m x^k \mathrm{d}x,\ b = am + k. \tag{2.3.186}$$

Рассмотрим процедуру в общем случае обратимой особенности $W_0(x) = \sum_i \prod_j x^{M_{ij}}$. Идеал Якоби для такой особенности порождается производными

$$\partial_k W_0(x) = \sum_i M_{ik} \prod_j x_j^{M_{ij}-\delta_{jk}}. \tag{2.3.187}$$

Из них можно составить комбинации, пропорциональные каждому из мономов:

$$\prod_j x_j^{M_{aj}} = \sum_k M^{-1}_{ka} x_k \partial_k W_0(x). \tag{2.3.188}$$

В частности, сама особенность W_0 лежит в своём идеале Якоби. Стоит отметить, что согласно [84] это является характеристическим свойством квазиоднородных функций.

С помощью этого выражения можно воспользоваться рекурсией аналогично случаю Ферма, сдвигая экспоненты мономов на строки матрицы M:

$$\begin{aligned}\prod_{i\le 5} x_i^{M_{ki}+a_i}\mathrm{d}^5x - D_-\left(\sum_b M^{-1}_{bk}\prod_{i\le 5} x_i^{a_i+\delta_{ib}}\mathrm{d}^5x/\mathrm{d}x_b\right) = \\ = \sum_b (a_b+1) M^{-1}_{bk} \prod_{i\le 5} x_i^{a_i}\mathrm{d}^5x\end{aligned} \tag{2.3.189}$$

Ту же редукцию можно провести по любой из строк матрицы M. Производя индукцию получаем

$$x^{Mv+k}\mathrm{d}^n x = \prod_{i=1}^n \left(\sum_j (k_j+1)M^{-1}_{ji}\right)_{v_i} \prod_{i=1}^n x^{k_i}\mathrm{d}^n x,\ b = Mv + k. \tag{2.3.190}$$

Вне зависимости от типа W_0 интеграл (2.3.185) выражается через обратную матрицу M^{-1}. Подставляя эту формулу в (2.3.184) получаем

$$
\begin{aligned}
&\sigma_a(\phi) = \prod_{i\le 5} \left((a_j+1)M^{-1}_{ji}\right)_{v_i} \sum_{\sum_{s=1}^h m_s s_i = M_{ij}v_j + a_i} \frac{\phi_1^{m_1}\cdots\phi_h^{m_h}}{m_1!\cdots m_h!},\\
&a = (a_1,\dots,a_5) \in \mathcal{R}_0,\\
&\sum_{i\le 5} M_{ij}a_j = 0,\ d,\ 2d,\ 3d.
\end{aligned}
\tag{2.3.191}
$$

Стоит заметить, что “запрещённые мономы” вида $\prod_{i=2k-1} x_i^{a_i-1}$ и $\prod_{i=2k} x_i^{a_i-1}$ для петли чётной длины и $x_1^{a_1}\prod_{i\ge 3} x_i^{k_i}$ для цепи приводят к тому, что часть символов Похгаммера в формуле (2.3.191) обнуляется, и формула не воспроизводит соответствующий период. Эта проблема связана с тем, что в периоде появляются логарифмические члены, которые мы не будем обсуждать в данной работе. При отсутствии запрещённых мономов аргументы символов Похгаммера не являются целыми.

Вещественная структура Для вычисления вещественной структуры мы найдём набор интегралов по вещественным циклам аналогично случаю гиперповерхностей Ферма, но в случае обратимых особенностей нужно быть более аккуратным с выбором контуров.

Для начала упорядочим базис кольца Милнора $\tilde{\mathcal{R}}_0$ так, что матрица η_{ij} имела антидиагональный вид. Обозначим элемент старшего веса $3d$ как $const\,\mathrm{Hess}(W_0(x)) = e_\rho(x) \in \tilde{\mathcal{R}}_0$. Тогда в таком выборе базиса имеем

$$
\eta(e_k(x)\,\mathrm{d}^5x, e_l(x)\,\mathrm{d}^5x) = \delta_{k+l,\rho+1}(-1)^{\sum_j M^{-1}_{ij}b_j}. \tag{2.3.192}
$$

Как отмечалось выше, $g(e_a(x)e_b(x))$ для любого $g \in \Pi_{W_0}$ равносильно тому, что $\eta_{ab} \neq 0$, то есть $a+b=\rho+1$. Используя тот же аргумент, что и в (2.3.182), аналогично случаю Ферма показывается, что экспонента Кэлерова потенциала имеет диагональный вид по периодам собственным относительно фазовой симметрии

$$
e^{-K} = \sum_k A_k|\sigma_k(\phi)|^2. \tag{2.3.193}
$$

Используя формулу (2.3.72) получаем, что матрица вещественной структуры антидиагональна $\mathbf{M}_a^b = \delta_{a+b,\rho+1}C_a$. В этом разделе мы обозначаем матрицу вещественной структуры $\mathbf{M}_a^b$ жирным шрифтом во избежание путаницы с матрицей экспонент M_{ab}.

Рассмотрим интеграл вида

$$
\int_{\Gamma_+} \prod_{i\le 5} x_i^{k_i} e^{-\sum_i\prod_j x_j^{M_{ij}}}\mathrm{d}^5x = \int_{\Gamma_+} x^k e^{-\sum_i x^{M_i}}\mathrm{d}^5x, \tag{2.3.194}
$$

где в правой части мы ввели обозначение $x^v = \prod_j x_j^{v_j}$ и v_j произвольный вектор длины 5. Контур Γ_+ пока произвольный целочисленный контур, по которому интеграл сходится. Чтобы взять интеграл сделаем сингулярную замену координат

$$y_i := x^{M_i} = \prod_j x_j^{M_{ij}}. \tag{2.3.195}$$

Эта замена вырождена на координатных плоскостях $x_i = 0$ и не инъективна. Подставляя замену (2.3.195) в интеграл (2.3.194) получаем

$$\int_{\Gamma_+} x^k e^{-\sum_i x^{M_i}} \mathrm{d}^5 x = \det M^{-1} \int_{\Gamma_+} y^{(k+1)M^{-1}-1} e^{-\sum_i y_i} \mathrm{d}^5 y, \tag{2.3.196}$$

где 1 в формуле обозначает вектор $(1,1,1,1,1)$. В таком виде понятно, что интеграл разбивается в произведение пяти интегралов, дающих гамма-функции при подходящем выборе контура Γ_+. В выборе контура, однако, надо проявить аккуратность: с одной стороны, замена $x \to y$ вырождена на координатных плоскостях, а с другой подынтегральное выражение может иметь отрицательные и дробные степени в переменных y.

Идея заключается в выборе контуров типа Похгаммера, как, например, в [74]. Для этого рассмотрим базовый одномерный контур заданный параметрически в плоскости одной переменной $z : z(s) = \rho(s)e^{i\theta(s)}$, который проходит ниже вещественной оси от $+\infty$ до нуля, затем обходит вокруг нуля слева, а потом уходит выше вещественной оси вновь на $+\infty$.

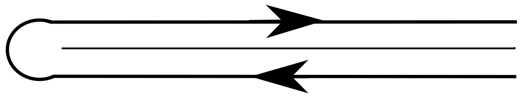


Рис. 2.5: Контур $z(s)$

Тогда базисный набор циклов $L_+^b \in \mathscr{H}_5^+$ можно определить параметрически в $\mathbb{C}^5$ как образ $\mathbb{R}^5$ с координатами $s_1, \ldots, s_5$:

$$x_i(s) = \prod_{j\le 5} \rho(s_j)^{M_{ij}^{-1}} \exp\Big(\sum_{j\le 5} (\theta(s_j) + 2\pi b_{ij}) M_{ij}^{-1}\Big), \quad \text{нет суммирования по i}, \tag{2.3.197}$$

где b_{aj} - матрица целых чисел. Очевидно, что интеграл (2.3.194) сходится по таким циклам. Более того, таких циклов имеется столько, сколько элементов в группе фазовой симметрии (поскольку преобразования фазовой симметрии определяются как $x_j \to \exp(2\pi\sqrt{-1}\sum_a M_{aj}^{-1} b_{aj})$.

В координатах y_i контуры L_+^b разбиваются в произведение пяти одномерных контуров типа Похгаммера:

$$y_i(s) = \rho(s_i)e^{i\theta(s_i)}. \tag{2.3.198}$$

Неоднозначность замены $x \to y$ проявляется в том, что у одного такого контура имеется несколько прообразов в плоскости x.

Интеграл (2.3.194) легко берётся по контуру L_+^b с использованием формулы

$$(e^{2\pi is}-1)\Gamma(s) = \int_C e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x, \tag{2.3.199}$$

где C - контур Похгаммера. Итоговый результат оказывается равным

$$\det M^{-1}\int_{\Gamma_+} y^{M^{-1}(k+1)-1}e^{-\sum_i y_i}\mathrm{d}^5 =$$
$$= \det M^{-1} \sum_{(s_1,\ldots,s_5)\in\{0,1\}^N} (-1)^{|s|}\exp\left[2\pi\sqrt{-1}\sum_a M_{aj}^{-1}(k_j+1)b_{aj}s_a\right]\times$$
$$\times\prod_{i\le 5}\Gamma((k_j+1)M_{ji}^{-1}). \tag{2.3.200}$$

Вместо того, чтобы искать и обращать матрицу перехода T_a^b для нахождения вещественной структуры, можно воспользоваться следующим приёмом. Будем искать матрицу вещественной структуры на формах $e_a(x)\,\mathrm{d}^5x$, то есть матрицу $\mathbf{M}(e_a(x)\,\mathrm{d}^5x) = \mathbf{M}_a^b e_b(x) = C_a e_{\rho+1-a}(x)\,\mathrm{d}^5x$, где действие на дифференциальные формы определяется по дуальности из действия на циклы. Чтобы найти коэффициенты C_a явно мы воспользуемся тем, что $e_a(x)\,\mathrm{d}^5x + \mathbf{M}(e_a(x)\,\mathrm{d}^5x)$ является вещественной формой, то есть её интеграл по любому вещественному циклу тоже является вещественным. Это условие даёт уравнение на коэффициенты C_a:

$$\mathrm{Im}\left[\int_{L_+^b}(e_a(x)+C_a e_{\rho+1-a}(x))e^{-W_0(x)}\mathrm{d}^5x\right] = 0. \tag{2.3.201}$$

Интеграл берётся по формуле (2.3.200):

$$\mathrm{Im}\left(\sum_{(s_1,\ldots,s_5)\in\{0,1\}^N}(-1)^{|s|}\exp\left[2\pi\sqrt{-1}\sum_a M_{ja}^{-1}(a_j+1)b_{aj}s_a\right]\right)\times$$
$$\times\left[\prod_{i\le 5}\Gamma((a_j+1)M_{ji}^{-1}) - C_a\prod_{i\le 5}\Gamma((\rho_j+1-a_j)M_{ji}^{-1})\right], \tag{2.3.202}$$

где мы воспользовались условием $g_a g_{\rho+1-a} = 1$, чтобы вынести общий множитель. Если вес $e_a(x)$ не равен нулю, то выражение в первой скобке имеет ненулевую мнимую часть, а потому получаем ответ для C_a:

$$C_a = \prod_{i\le 5}\frac{\Gamma((a_j+1)M_{ji}^{-1})}{\Gamma((\rho_j+1-a_j)M_{ji}^{-1})}. \tag{2.3.203}$$

Наконец, подставим формулы для периодов (2.3.191), голоморфного спаривания (2.3.192) и вещественной структуры (2.3.203) в формулу для Кэлерова потенциала специальной геометрии (2.3.72):

$$e^{-K} = \sum_{\substack{\bar{a}\in\mathcal{R}_0 \\ \sum_i a_j M^{-1}_{ji}=0,1,2,3}} (-1)^{\sum_i a_j M^{-1}_{ji}} \prod_{i=1}^{5} \gamma\left((a_j+1)M^{-1}_{ji}\right) |\sigma_a(\phi)|^2. \qquad (2.3.204)$$

Таким образом, специальная Кэлерова геометрия для любой обратимой особенности вокруг орбифолдной точки выражается через простой степенной ряд от параметров деформации с коэффициентами записывающимися с помощью обратной матрицы M^{-1}_{ij} экспонент потенциала W_0. Трансцендентные коэффициенты вещественной структуры выражаются через гамма функции с аргументами включающими ту же самую матрицу M^{-1}_{ij}.

2.3.5 Заключение

В этой главе мы детально изучили специальную Кэлерову геометрию на пространствах модулей большого числа различных многообразий Калаби-Яу. По сравнению с предыдущими известными вычислениями [23, 24, 63], в которых специальная геометрия была вычислена в случае одного-двух модулей, мы смогли провести вычисления для десятков и даже сотен модулей в окрестностях орбифолдных точек пространств модулей. Все наши вычисления опираются на соответствие типа Ландау-Гинзбург - Калаби-Яу, то есть связь нелинейной сигма-модели с линейной. В то же время, в отличие от стандартных физических аргументов, мы установили математическое равенство между специальной Кэлеровой геометрией пространства комплексных модулей сигма-модели и метрикой Замолодчикова на пространстве конформных деформаций теорий Ландау-Гинзбурга, то есть частным случаем tt^*-геометрии.

Вычисления в разделах 2.3.1 и 2.3.2 показывают, что отличия формулы для специальной геометрии в случае большого числа модулей и в случае одного модуля минимальны, и, можно сказать, заключаются в комбинаторном факторе в точке орбифолда.

Также наш метод вычисления легко масштабируется и обобщается. Применение одной и той же техники вычисления не зависящей от специфики конкретной модели позволяет получить формулы для специальной геометрии для всех гиперповерхностей типа Ферма и большого числа обратимых особенностей для произвольного числа параметров деформации. Единственное, в чём проявляется различие - это “комбинаторика” конкретной модели, то есть различие в инвариантных кольцах Милнора.

Как отмечалось во введении к этой главе, существенную роль в этой универсальности играет роль группа фазовой симметрии, благодаря которой периоды разбиваются по одномерным представлениям, и которая определяет структуру выражения для периодов, вещественной структуры и пересечения циклов в окрестности орбифолдной точки.

В первой половине этой главы обсуждалась важность вычисления специальной геометрии для понимания струнных компактификаций. Приведём несколько важных приложений нашего вычисления.

1. Специальная Кэлерова геометрия вычисляет корреляционные функции в первом порядке по струнной константе связи, то есть по струнным конфигурациям рода ноль. В A-модели в старших родах поправки к препотенциалу определяются голоморфными инстантонами старших родов. В B-модели ситуация устроена несколько сложнее. Старшие поправки описываются теорией гравитации Кодаиры-Спенсера. В принципе, они вычисляются с помощью так называемых *уравнений голоморфной аномалии* [15]. Обозначим препотенциал специальной Кэлеровой геометрии с квантовыми поправками

$$F^{full} = \sum_{g=0}^{\infty} \lambda^{2g-2} F^{(g)}, \tag{2.3.205}$$

где $F^{(0)} = F$ обозначает препотенциал рода ноль и $F^{(g)} \in L^{2g-2} \to \mathscr{M}$, $\Omega \in L^{-1} \to \mathscr{M}$. Тогда оказывается, что вклады старших родов зависят также от антиголоморфных параметров, и эта зависимость определяется уравнениями:

$$\begin{aligned} \overline{\partial_k}\partial_m F^{(1)} &= \frac{1}{2}\overline{C_k^{\bar{i}\bar{j}}} C_{mij} + \left(\frac{\chi}{24} - 1\right) G_{\bar{k}m}, \\ \overline{\partial_k} F^{(g)} &= \frac{1}{2}\overline{C_k^{\bar{i}\bar{j}}} \left(D_i D_j F^{(g-1)} + \sum_{r=1}^{g-1} D_i F^{(r)} D_j F^{(g-r)} \right), \end{aligned} \tag{2.3.206}$$

где индексы поднимаются и опускаются метрикой $g_{i\bar{j}} = e^{-K} G_{i\bar{j}} = e^{-K}\partial_i \overline{\partial_j} K$, а D_j означают ковариантные производные (в расслоении, в котором лежит $F^{(a)}$, на который они действуют).

Эти уравнения можно решать, при этом возникает набор констант интегрирования, которые, в принципе, можно определять из условий модулярности поведения в определённых пределов и в других. В частности, в случае зеркального образа квинтики вычисление было проделано в [56], где авторам удалось фиксировать и определить препотеницал до рода 51.

Эти уравнения содержат специальную Кэлерову метрику $G_{i\bar{j}}$, и наши вычисления открывают дорогу для исследований B-модели старших родов для большого числа примеров, что является одним из направлений для дальнейшей работы.

2. Как говорилось раньше, в реалистичных моделях теории струн все модули в определённом бэкграунде должны быть стабилизированы. Самый распространённый способ стабилизации модулей комплексных структур в теории струн типа IIB носит название компактификации с потоками, и заключается во включении в бэкграунд ненулевых значений B-поля и Рамон-Рамоновских полей C_2. Условие суперсимметрии определяет форму таких потоков, которые раскладываются по целочисленным классам когомологий многообразия Калаби-Яу $\mathcal{X}$, то есть наматываются на суперсимметричные циклы. Такие потоки определяются пертурбативным суперпотенциалом

$$W_{flux}(\phi,\tau) := \int_{\mathcal{X}} \Omega_\phi \wedge G_3, \tag{2.3.207}$$

где $G_3 = F_3 - \tau H_3,\ F_3 = \mathrm{d}C_2,\ H_3 = \mathrm{d}B$ и $\tau = C_0 + i g_s^{-1}$.

Тогда суперсимметричные вакуумы определяются уравнениями критических точек суперпотенциала

$$D_i W = (\partial_{\phi_i} + \partial_{\phi_i} K) W = 0,\ D_\tau W = 0, \tag{2.3.208}$$

где в Кэлеров потенциал был включён дилатон:

$$K = -\ln\left(i \int \Omega_\phi \wedge \overline{\Omega_\phi}\right) - \ln(-i(\tau - \bar\tau)). \tag{2.3.209}$$

Общее решение таких уравнений соответствует фиксированным модулям комплексной структуры и дилатона. Уравнения решаются численно, как, например, в [33]. Знание метрики на пространстве модулей позволяет решать эти уравнения по крайней мере в окрестности орбифолдных точек.

3. Ещё одним приложением наших результатов является возможность изучать пространство модулей как метрическое пространтство, например считать расстояние между специальными точками и оценивать размер. В частности, оценки на размер пространства модулей даются так называемой улучшенной гипотезой о Расстояниях в Свомпленде (refined Swampland Distance Conjecture). Оригинальная гипотеза о Расстояних в Свомпленде была сформулирована Оогури и Вафой в [75]. Она утверждает, что в любая эффективная теория возникающая из самосогласованной квантовой гравитации имеет радиус применимости, а точнее, что при деформации вдоль достаточно большого пути в пространстве параметров эффективная теория перестанет описывать низкоэнергетический предел квантовой теории. Это оказывается связанным с тем, что в квантовой теории появляются башни лёгких частиц. Улучшенная гипотеза утверждает, что радиус применимости имеет порядок единицы

в естественном Планковском масштабе. Эта гипотеза была проверена в окрестности орбифолдной точки квинтики используя наши вычисления в [16], где было численно найдено расстояние, при котором низкоэнергетическое приближение перестаёт быть применимым.

В процессе вычислений специальной геометрии мы получили базисы периодов по различным циклам. Ортогонализацией Грамма-Шмидта периоды по целочисленным циклам можно привести к симплектическому базису. Периоды в целочисленном базисе вычисляют одноточечные функции открытой струны прикреплённой к суперсимметричной BPS бране, лежащей в классе гомологий цикла, эти корреляционные функции вычисляют центральный заряд (а значит массу) состояний соответствующих этой бране. Стоит отметить, что имеются альтернативные способы вычисления целочисленных периодов, в частности использование Гамма-класса [40], связь с которым планируется прояснить в дальнейшем.

Наши вычисления дают выражения для специальной метрики в окрестности орбифолдных точек пространств модулей в виде степенного ряда в большом числе случаев. Помимо уже указанных направлений дальнейших исследований имееются неотвеченные естественные вопросы: во-первых мы планируем расширить применимость нашего метода. В частности, в случае обратимых особенностей наш ответ не включает так называемые “запрещённые деформации”. Во-вторых, как упоминалось, полиномиальные деформации не во всех случаях включают все деформации комплексной структуры многообразия. Более концептуальный вопрос для исследования заключается в выяснении геометрии пространства модулей в окрестности других специальных точек. В принципе, в пространствах модулей комплексных структур большой размерности может иметься множество точек соответствующих специальным комплексным структурам на многообазии Калаби-Яу. Самые простые, помимо орбифолдных, включают конифолдные точки или точки большой комплексной структуры. Было бы интересно выписать формулы для геометрии в окрестности таких точек и провести аналитические продолжения, связывающие различные формулы. Как мы увидим в следующей главе, один из возможных способов сделать это использует линейные калибровочные сигма модели.

Глава 3

Глава 3 : Линейные калибровочные сигма модели и локализация

В этой главе мы обсудим линейные калибровочные сигма модели (ЛКСМ). Это N=(2,2) суперсимметричные калибровочные теории с плоским таргет-пространством. Различные режимы таких теорий способны порождать конформные теории вида нелинейных сигма моделей и теорий Ландау-Гинзбурга, а также многие другие. Ещё в [93] было подмечено, что с помощью ЛКСМ можно физически показать связь между такими теориями.

ЛКСМ допускают различные суперсимметричные бэкграунды, в частности, для нас будет наиболее интересным бэкграунд на двумерной сфере с круглой метрикой, который сохраняет часть суперсимметрии. В таком бэкграунде можно точно вычислить статсумму теории используя суперсимметричную локализацию. Было предсказано [58], а потом и физически обосновано, что статистическая сумма на сфере с круглой метрикой в подходящих режимах вычисляет специальную Кэлерову геометрию на пространстве Кэлеровых модулей связанной с ЛКСМ нелинейной сигма модели с таргет-пространством Калаби-Яу (например, [43]).

Используя зеркальную симметрию, мы можем связать специальную геометрию на пространстве Кэлеровых модулей многообразия $\check{\mathcal{X}}$ и на пространстве комплексных модулей зеркально двойственного ему многообразия $\mathcal{X}$. В случае, когда одно из этих многообразий оказывается связано с обратимыми особенностями во взвешенных проективных пространствах, то есть с примерами, изученными в предыдущих разделах, мы можем вычислить статсумму методом локализации и специальную геометрию с помощью осциллирующих интегралов, и сравнить результаты с помощью зеркальной симметрии.

Это оказывается удобно сделать в подходе Батырева [9], который можно интерпретировать как обобщённое "правило транспозиции" Берглунда и Хубша [14]. Используя этот метод в [5] мы явно провели все вычисления в окрестностях орбифолдных точек пространства модулей, найти зеркальное отображение и показать, что выражения совпадают, как и предсказано.

3.1 ЛКСМ

Опишем построение линейных калибровочных сигма моделей следуя [53]. Идея заключается в том, чтобы рассмотреть теорию кирального суперполя Φ с плоским таргет-пространством

$$L_D = \int \mathrm{d}^4\theta\, \overline{\Phi}\Phi, \tag{3.1.1}$$

и калибровать $U(1)$-симметрию $\Phi \to e^{iA}\Phi$, где $A(x,\theta,\bar{\theta})$ - киральное суперполе. Чтобы скомпенсировать преобразование кинетического члена $\overline{\Phi}\Phi \to \overline{\Phi}e^{-i\bar{A}+iA}\Phi$ нужно ввести вещественное супероле V, которое преобразовывается при калибровочных преобразованиях, как $V \to V + i(\bar{A} - A)$ и вставить его в Лагранжиан

$$L_D = \int \mathrm{d}^4\theta\, \overline{\Phi}e^V\Phi. \tag{3.1.2}$$

Векторное суперполе состоит из вектора v_μ, скаляра σ, двух спиноров $\lambda_\pm$ и вспомогательного поля D. Вторая производная векторного суперполя

$$\Sigma := \overline{D_+}D_-V \tag{3.1.3}$$

является скрученным киральным полем, то есть

$$\overline{D_+}\Sigma = D_-\Sigma = 0. \tag{3.1.4}$$

Старшая компонента этого поля $\theta^+\overline{\theta^-}(D - i(\partial_0 v_1 - \partial_1 v_0))$, поэтому это поле называется супер-напряжённостью поля V. Супер-напряжённость используется, чтобы построить кинетический член калибровочного поля:

$$L_{gau} := -\frac{1}{2e^2}\int \mathrm{d}^4\theta\overline{\Sigma}\Sigma \tag{3.1.5}$$

В теорию также можно добавить F-член и скрученный F-член. Первый, как и в случае теории Ландау-Гинзбурга задаётся формулой

$$L_F := \int \mathrm{d}^2\theta\, W(\Phi) + \text{э.с.}, \tag{3.1.6}$$

где $W(\Phi)$ - голоморфная и калибровочно инвариантная функция своего аргумента. Скрученный F-член является его аналогом

$$L_{FI} := -\frac{1}{2}t\int \mathrm{d}^2\tilde{\theta}\,\Sigma + \text{э.с.}, \tag{3.1.7}$$

где скрученный суперпотенциал выбирается линейным по супернапряжённости Σ и комплексный параметр $t = r - i\theta$ является суммой параметра Файе-Илиопулоса r и тэта-угла θ. Очень скоро этот параметр будет играть роль комплексифицированного Кэлерова класса некоторого многообразия.

Приведём простейший интересный для нас пример Лагранжиана ЛКСМ:

$$L = \int \mathrm{d}^4 \left(\overline{\Phi} e^V \Phi - \frac{1}{2e^2} \overline{\Sigma} \Sigma \right) + \frac{1}{2} \left(-t \int \mathrm{d}^2 \tilde{\theta} \Sigma + \text{э.с.} \right). \tag{3.1.8}$$

Если записать Лагранжиан в компонентах и избавиться от вспомогательных членов с помощью уравнений движения, получится следующий компонентный Лагранжиан:

$$\begin{aligned} L = &- D^\mu \bar{\phi} D_\mu \phi - \frac{e^2}{2}(|\phi|^2 - r)^2 - |\sigma|^2 |\phi|^2 + \\ &+ i\overline{\psi}_-(D_0 + D_1)\psi_- + i\overline{\psi}_+(D_0 - D_1)\psi_+ - \overline{\psi_-}\sigma\psi_+ - \overline{\psi_+}\bar{\sigma}\psi_- - \\ &- i\bar{\phi}\lambda_-\psi_+ + i\bar{\phi}\lambda_+\psi_- + i\overline{\psi_+\lambda_-}\phi - i\overline{\psi_-\lambda_+}\phi + \\ &+ \frac{1}{2e^2}(-\partial^\mu \bar{\sigma} \partial_\mu \sigma + i\overline{\lambda}_-(\partial_0 + \partial_1)\lambda_- + i\overline{\lambda}_+(\partial_0 - \partial_1)\lambda_+) + \\ &+ \frac{1}{2e^2}(\partial_0 v_1 - \partial_1 v_0) + \theta v_{01}. \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Из этого Лагранжиана можно извлечь потенциальный член для скаляров:

$$U = |\sigma|^2 |\phi|^2 + \frac{e^2}{2} \left(|\phi|^2 - r \right)^2, \tag{3.1.10}$$

зависящий от параметра Файе-Илиопулоса и заряд $U(1)$-поля $\theta(\partial_0 v_1 - \partial_1 v_0)$.

У этой теории есть очевидное обобщение на случай нескольких киральных и калибровочных полей, а также F-члена:

$$\begin{aligned} L = &\int \mathrm{d}^4\theta \left(\sum_{i=1}^{N} \overline{\Phi_i} e^{Q_{ia} V_a} \Phi_i - \sum_a \frac{1}{2e_a^2} \overline{\Sigma_a} \Sigma_a \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(- \int \mathrm{d}^2 \tilde{\theta} \sum_{a=1}^{k} t_a \Sigma_a + \int \mathrm{d}^2\theta W(\Phi) + \text{э.с.} \right), \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

где суперпотенциал $W(\Phi)$ инвариантен относительно калибровочной симметрии. Лагранжиан также классически обладает инвариантностью относительно R-симметрии $U(1)_V \times U(1)_A$. Первая нарушается, если суперпотенциал $W(\Phi)$ не является взвешенным однородным (если он является таковым, то это определяет заряды полей Φ_i), а вторая нарушается в квантовом случае, если многообразие вакуумов не является многообразием Калаби-Яу.

В такой теории потенциал скалярных полей равняется

$$U = \sum_{i=1}^{N} |Q_{ia}\sigma_a|^2 |\phi_i|^2 + \sum_{a=1}^{k} \left(Q_{ia}|\phi_i|^2 - r_a\right)^2 + \sum_{i=1}^{k} \left|\frac{\partial W}{\partial \phi_i}\right|^2 . \tag{3.1.12}$$

Именно это обобщение нужно нам для построения моделей связанных с обратимыми особенностями.

Многообразие суперсимметричных вакуумов задано уравнениями

$$Y_r = \left\{ (\phi_1, \ldots, \phi_N) \in \mathbb{C}^N \;\middle|\; \sum_{a=1}^{N} Q_{al}|\phi_a|^2 = r_l,\ l = 1, \ldots, k,\ \frac{\partial W}{\partial \phi_a} = 0 \right\} / U(1)^k, \tag{3.1.13}$$

где действие группы на координатах ϕ_a задано зарядами Q_{al}. Заметим, что при различных значениях параметров Файе-Илиопулоса r_l это многообразие может иметь различную топологию. В общем случае, имеются вещественные гиперплоскости в пространстве r_l, при переходе через которые топология многообразия меняется. В этом случае говорят, что при разных значениях параметров Файе-Илиопулоса ЛКСМ находится в разных *фазах* [93]

Если устремить все константы связи e_a к бесконечности, то благодаря суперсимметричной версии механизма Хиггса динамика безмассовых мод в для подходящих r_l сведётся к нелинейной суперсимметричной сигма-модели на пространстве вакуумов Y_r с факторметрикой, возникающей из $\mathbb{C}^N$. Такая фаза параметров r_l геометрической фазой. В геометрической фазе все безмассовые моды лежат в касательном пространстве к многообразию вакуумов. В более общем случае, когда размерность Y_r падает, часть безмассовых мод направлена в касательном пространстве, а часть вовне, такие фазы называются гибридными. Другая крайность возникает, когда многообразие вакуумов состоит из одной точки, все безмассовые моды лежат в нормальном расслоении, такая фаза называется фазой Ландау-Гинзбурга.

3.1.1 Локализация и зеркальная симметрия

В предыдущем разделе описывались суперсимметричные линейные калибровочные модели на плоском пространстве. Часть выражений можно вычислить используя топологический твист теории. Вычисление специальной геометрии на Кэлеровых модулях пространства вакуумов опирается на существование суперсимметричных бэкграундов на круглой сфере.

Алгебра суперсимметрии на S^2 совпадает с $SU(2|1)$, где $SU(2) \subset SU(2|1)$ алгебра поворотов на сфере. R-симметрия является алгеброй картана в этой бозонной $SU(2)$-компоненте. Суперзаряд $\mathcal{Q}$ выражается через спинор Киллинга на двумерной сфере. Суперсимметричная локализация с успехом применялась для вычислений в теориях в разных бэкграундах и размерностях, как $S^2, S^3, S^4, S^5, \Omega$ - деформированное $\mathbb{R}^4$ и в других [55, 61, 76]. Идея локализации заключается в обобщении эквивариантной локализации на случай суперсимметрии. В присутствии нечётной симметрии $\mathcal{Q}$ вычисление функционального интеграла сводится к квазиклассическому вычислению, а именно к вычислению действия и однопетлевого детерминанта вокруг неподвижных точек $\mathcal{Q}$, которые зачастую образуют конечномерное многообразие.

Интеграл от $\mathcal{Q}$-замкнутых членов зависит только от класса когомологий. Технически идея локализации заключается в прибавке к Лагранжиану действия $\mathcal{Q}$-точного члена δS с большим весом T. Тогда в пределе $T \to \infty$ функциональный интеграл сведётся к методу перевала вокруг перевальных точек δS. Выбор члена δS свой в каждом локализационном вычислении, и в известной степени является искусством.

На ЛКСМ на двумерной сфере в Евклидовой сигнатуре включающей киральные и векторные поля, а также члены Файе-Илиопулоса, есть два выбора добавочного члена. Один приводит к локализации в виде конечномерного интеграла по скалярам векторных мультиплетов, и называется локализацией в Кулоновской ветке. Второй выбор приводит к локализации по дискретному набору значений скаляра из кирального мультиплета и называется локализацией на Хиггсовской ветке. Совпадение результатов двух локализаций проверяется существенно нетривиальным вычислением.

Мы используем локализацию на Кулоновской ветке. Рассмотрим теорию абелевых калибровочных полей $V_a,\ a \leq k$ и киральных полей $\Phi_i,\ i \leq N$ с зарядами Q_{ia} под действием калибровочной группы и R-зарядами q_i с Лагранжианом (3.1.11). Применение локализации [13, 36] даёт формулу для статсуммы на сфере

$$Z_{S^2} = \sum_m \int \left(\prod_{j \leq k} \frac{\mathrm{d}\sigma_j}{2\pi} \right) Z_{class}(\sigma, m) \prod_{i \leq N} Z_{\Phi_i}(\sigma, m), \tag{3.1.14}$$

где однопетлевой детерминант абелевых калибровочных полей равен единице, детерминант кирального поля равен

$$Z_{\Phi_i} = \frac{\Gamma(q_i/2 - i\sum_l (Q_{il}\sigma_l - m_l/2))}{\Gamma(1 - q_i/2 - i\sum_l (Q_{il}\sigma_l + m_l/2))}, \tag{3.1.15}$$

а классическое действие равно

$$Z_{class} = e^{-4\pi i r_l \sigma_l - i\theta_l m_l}. \tag{3.1.16}$$

Интеграл в (3.1.14) ведётся по всем вещественным значениям скаляров векторного мультиплета σ_l и по всем *целочисленным* значением скрученных масс m_l. Как σ так и m лежат в алгебре Картана калибровочной группы $U(1)^k$, но m лежат в её целочисленной решётке, определённой как значения всевозможных весов представлений группы $U(1)^k$. Это условие возникает как условие квантования Дирака, чтобы функциональный интеграл был хорошо определён.

Формулу для локализации удобно переписать в других координатах $\tau_l := -i\sigma_l$

$$Z_{S^2} = \sum_m e^{-i\theta_l m_l} \int_{C_1} \cdots \int_{C_k} \left(\prod_{l\le k} \frac{\mathrm{d}\tau_;}{2\pi i} \right) e^{4\pi r_l \tau_l} \prod_{i\le N} \frac{\Gamma\left(q_i/2 + \sum_{l=1}^k Q_{il}(\tau_l - \frac{m_l}{2}\right)}{\Gamma\left(1 - q_i/2 - \sum_{l=1}^k Q_{il}(\tau_l + \frac{m_l}{2}\right)}, \tag{3.1.17}$$

где контуры C_l идут вдоль мнимых осей. Сферическая статсумма не зависит ни от констант связи e_l ни от точной формы суперпотенциала W. В частности, можно с самого начала устремить параметры e_l к бесконечности. Это означает, что качественно интеграл (3.1.1) вычисляет величину в безмассовом секторе теории, например на нелинейной сигма модели в случае геометрической фазы.

В работе [58] было предсказано, что статумма на сфере совпадает с экспонентой Кэлерова потенциала специальной метрики на пространстве Кэлеровых модулей многообразия вакуумов Y_r в геометрической фазе, $e^{-K^{Y_r}} = \log Z_{S^2}$. Эта гипотеза была проверена в оригинальной работе [58] для нескольких случаев. В дальнейшем появились физические доказательства гипотезы [43]. Одна из идей заключается в том, что специальная геометрия на пространстве модулей является метрикой Замолодчикова на пространстве деформаций конформных теорий поля получающихся в инфракрасном пределе, а статсумма на сфере вычисляет конформную аномалию, связанную с метрикой Замолодчикова (см., например [43]).

С точки зрения прямых вычислений проверка гипотезы затрудняется тем, что вычисление метрики специальной геометрии K^{Y_r} достаточно трудоёмко. Мы же используем идею зеркальной симметрии, которая заключается в том, что эта метрика совпадает с метрикой на пространстве деформаций комплексных структур зеркального многообразия $\mathcal{X}$

$$K^{Y_r} = K^{\mathcal{X}}, \quad e^{-K^{\mathcal{X}}} = -i \int_{\mathcal{X}} \Omega \wedge \overline{\Omega}. \tag{3.1.18}$$

Как показано в предыдущем разделе данной работы, мы разработали способы для эффективного вычисления специальной Кэлеровой геометрии на пространстве комплексных модулей большого класса многообразий Калаби-Яу. Ниже, следуя нашей работе [5] мы покажем, как можно использовать зеркальную симметрию для непосредственной проверки гипотезы Джокерса с соавторами и вычислений геометрии на пространстве Кэлеровых модулей. В частности, мы продемонстрируем истинность фомулы

$$\int_{\mathcal{X}_\phi} \Omega_\phi \wedge \overline{\Omega_\phi} = const\ Z_{S^2}, \tag{3.1.19}$$

где Y_r и $\mathcal{X}_\phi$ зеркально двойственны, и мы напишем явную формулу для зеркального отображения в этом случае $r = r(\phi)$.

3.1.2 Зеркальная симметрия и торическая геометрия

Зеркальная симметрия сейчас - это огромная область деятельности, охватывающая теорию струн, математическую физику, комплексную и алгебраическую геометрию, теорию категрий и другие науки. Изначально она появилась [49] как наблюдение о дуальности киральных и антикиральных полей для теории струн определяемой орбифолдами произведений N=2 суперсимметричных минимальных моделей, или, с точки зрения сигма-моделей была замечена дуальность между гиперповерхностями типа Ферма и их факторами по конечным (максимально допустимым) подгруппам. В принципе, зеркальная симметрия должна связывать все корреляционные функции теории струн, ввиду чего геометрическое описание оказывается вырожденным, то есть имеются различные геометрические описания (компактификация на многообразие $\mathcal{X}$ и его зеркальный образ $\mathcal{Y}$) одной и той же теории струн. В работе [49] было показано, что для гиперповерхностей Ферма и их факторов имеется дуальность в числах Ходжа $h^{2,1}(\mathcal{X}) = h^{1,1}(\mathcal{Y})$. В работе [23] было проверено совпадение корреляционных функций (в первых порядках) возникающих из специальной Кэлеровой геометрии на пространствах комплексных модулей зеркальной квинтики и Кэлеровых модулей квинтики. На раннем этапе не было способа точного вычисления геометрии на пространстве Кэлеровых модулей, и зеркальная симметрия стала первым способом последовательного вычисления инстантонных чисел.

Более общие зеркальные пары были предложены в работе Берглунда и Хубша [14], где они обобщили рецепт Грина и Плессера на случай обратимых особенностей. В этом случае зеркальным образом многообразия Калаби-Яу заданного обратимой особенностью оказывается фактор другого многообразия Калаби-Яу из того же класса, но при этом матрица показателей $\check{M}_{ij}$ зеркального многообразия оказывается транспонированной по отношению к исходной $\check{M}_{ij} = M_{ji}$. Ввиду этого, правило Берглунда и Хубша иногда называется правилом транспозиции.

Глубокие обобщения правила транспозиции пришли из торической геометрии. Соответствующие конструкции были даны Батыревым [9] в случае гиперповерхностей в торических многообразиях и им совместно с Борисовым [10, 17] для полных пересечений в торических многообразиях.

У зеркальной симметрии в физическом смысле для подпространств торических многообразий и их обобщений появилось замечательное доказательство за авторством Хори и Вафы [54], основанное на линейных калибровочных сигма моделях. Математически связь между специальной геометрией на пространствах Кэлеровых и комплексных модулей была установлена в работах Гивенталя [45] и группы Яу [70].

Зеркальная симметрия развивалась и в других направлениях. В частности, была дана интерпретация зеркальной симметрии как частного случая T-дуальности в теории струн (дуальности переставляющей моды намотки вокруг окружности с импульсами вдоль окружности обратного радиуса) [86]. Основываясь на изучении D-бран в теории струн Концевичем была предложена теоретико-категорная версия зеркальной симметрии [65]. Каждая из этих областей привела ко многим открытиям как в физике так и в математике.

Для наших целей подходит зеркальная симметрия в смысле Батырева, а именно построение зеркальных пар. Как мы покажем, для так построенных зеркальных пар специальная геометрия на пространстве комплексных структур одного многообразия совпадает со статсуммой на двумерной сфере другого.

Торическая геометрия Обсудим факты из торической геометрии, которые понадобятся нам для наших вычислений. Торическое многообразие является естественным обобщением комплексного проективного пространства $\mathbb{P}^n$. Если X - n-мерное торическое многообразие, то внутри него имеется открытое множество изоморфное n-мерному комплексному тору $(\mathbb{C}^*)^n$

$$(\mathbb{C}^*)^n \subset X. \tag{3.1.20}$$

Более того, действие тора естественно продолжается на всё многообразие, поэтому они называются торическими. Для $\mathbb{P}^n$ тор является множеством, на котором ни одна из однородных координат не обращается в ноль.

Имеется несколько естественных способов построения торических многообразий. Самый близкий к линейным калибровочным сигма моделям заключается в процедуре факторизации

$$X := \mathbb{C}^N//_r(\mathbb{C}^*)^k := (\mathbb{C}^N - Z_r)/(\mathbb{C}^*)^k, \tag{3.1.21}$$

где $//_r$ означает фактор Геометрической Теории Инвариантов (ГТИ), $n = N - k$, а Z_r - некоторое $(\mathbb{C}^*)^k$ - инвариантное множество. На многообразии, полученном ГТИ факторизацией имеется естественная симплектическая форма, задающая Кэлеров класс, полученная фактором канонической формы $-i/2\sum_i \mathrm{d}z \wedge \overline{\mathrm{d}z}$ на $\mathbb{C}^N$. Тор, действующий на X является фактором $(\mathbb{C}^*)^N/(\mathbb{C}^*)^k$.

Например, в случае проективного пространства имеем

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^{n+1}//_r\mathbb{C}^* := (\mathbb{C}^{n+1} - 0)/\mathbb{C}^*, \tag{3.1.22}$$

а Кэлерова форма равняется форме Фубини-Штуди умноженной на r.

Хорошо известно [34], что фактор в смысле ГТИ изоморфен Гамильтоновой (симплектической) редукции вида

$$X = \left\{ (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{C}^N \;\middle|\; \sum_{a=1}^N Q_{al}|x_a|^2 = r_l,\ l = 1, \dots, k \right\} /U(1)^k, \tag{3.1.23}$$

где Q_{al} - веса действия тора $(\mathbb{C}^*)^k$ на $\mathbb{C}^N$ и $U(1)^k \subset (\mathbb{C}^*)^k$ состоит из преобразований по модулю 1. При этом Гамильтонову редукцию можно понимать как реализацию последовательного фактора по $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{C}^*$ и $U(1) \subset \mathbb{C}^*$. Таким образом, пространство вакуумов ЛКСМ с нулевым суперпотенциалом $W = 0$ изоморфно торическому многообразию. Константы Файе-Илиопулоса параметризуют Кэлеров класс многообразия вакуумов. Каждый из $\mathbb{C}^*$, по которому происходит факторизация порождает класс (ко)гомологий $H^{1,1}(X)$. Размерность $h^{1,1} = k$.

Классический способ задания торических многообразий использует *веер*. Рассмотрим $\mathbb{R}^n$ с целочисленной решёткой, заданной точками с целыми координатами. Конусом (рациональным, полиэдральным) называется выпуклая оболочка нескольких векторов из целочисленной решётки.

$$\sigma = \{\sum_i a_i v_i \mid v_i = (v_{i1}, \dots, v_{in}),\ a_i \in \mathbb{R}_+\}. \tag{3.1.24}$$

Мы будем рассматривать сильно выпуклые конусы, то есть $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$. Веером Σ называется набор конусов $\{\sigma_I\}$ замкнутый относительно взятия границы, то есть для каждого конуса из веера его граница разбивается на конуса, каждый из которых также принадлежит вееру. Вместо того, чтобы строить торическое многообразие $\mathbb{P}_\Sigma$ непосредственно из веера, мы сведём конструкцию к предыдущей. Рассмотрим одномерный скелет веера $\Sigma(1) \subset \Sigma$ состоящий из всех одномерных конусов веера, то есть линейных оболочек всех векторов $v_i,\ 1 \le i \le N$ встречающихся в конусах веера Σ. Мы будем отождествлять одномерные конусы $\mathbb{R}_+ v_i$ с их порождающими v_i.

Тогда рассмотрим произвольные линейные зависимости с целыми коэффициентами между порождающими векторами одномерных конусов.

$$\sum_{i \le N} m_i v_i = 0.\ m_i \in \mathbb{Z}. \tag{3.1.25}$$

Выберем какой-нибудь целочисленный базис $Q_{ia},\ 1\ \le a \le k$ в таких соотношениях. То есть любое соотношение вида (3.1.25) выражается как сумма соотношений $\sum_{i \le N} v_i Q_{ia}$ с целыми коэффициентами. Математически это выражается точной последовательностью

$$0 \to \mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}^N \to \mathbb{Z}^n \to 0, \tag{3.1.26}$$

где первое отображение имеет матрицу Q_{ia}, а второе матрицу v_{ij}. Тогда сопоставим каждому вектору скелета однородную координату $v_i \to x_i$, и определим действие $(\mathbb{C}^*)^k$ на $\mathbb{C}^N$ по правилу $x_i \to t_a^{Q_{ia}} x_i$, где t_a - координаты на $(\mathbb{C}^*)^k$.

Определим также *нестабильный локус* Z_Σ. Для этого рассмотрим наборы S_j координат x_i такие, что все v_i из набора не принадлежат никакому из конусов веера.Тогда Z_Σ определяется как объединение всех гиперплоскостей вида $\cap_{x_i\in S_j}\{x_i = 0\}$.

Торическое многообразие определяется по вееру Σ следующим образом:

$$\mathbb{P}_\Sigma := (\mathbb{C}^N - Z_\Sigma)/(\mathbb{C}^*)^k. \tag{3.1.27}$$

Каждый из конусов веера определяет орбиту тора внутри $\mathbb{P}_\Sigma$. m-мерному конусу соответствует $n-m$-мерная орбита дейтвия тора. Отношение инцидентности среди конусов при обращении порядка является отношением инцидентности среди орбит. Одномерные конуса соответсвуют дивизорам, то есть орбитам комплексной коразмерности 1. Пуанкаре дуальные им формы порождают классы двумерных когомологий торического многообразия.

Последний нужный нам способ задания торического многообразия использует выпуклый рациональный *политоп* Δ. Целочисленные политопы можно задать как выпуклую оболочку набора точек из целочисленной решётки $\mathbb{R}^n$, то есть

$$\Delta := \{\sum_{i\le h} a_i v_i \mid v_i = (v_{i1},\dots,v_{in}),\ 0\le a_i\le 1,\ \sum_i a_i = 1\}. \tag{3.1.28}$$

Торическое многообразие $\mathbb{P}_\Delta$ строится по вееру $\mathbb{P}_{\Sigma_\Delta}$, где веер Σ_Δ является *нормальным веером* политопа Δ. Конусы нормального веера являются нормалями к граням политопа Δ. В частности, одномерные конусы являются нормалями к граням максимальной размерности (в классической конструкции грани нормального веера являются нормалями со знаком минус). У так построенного торического многообразия целочисленные точки политопа находятся во взаимо-однозначном соответствии с сечениями антиканонического расслоения $K^{-1}\to\mathbb{P}_\Delta$, то есть с мономами, сумма которых с коэффициентами задаёт гиперповерхность Калаби-Яу в $\mathbb{P}_\Delta$ (если она невырождено). В частности, для политопа обсуждавшегося в главе 2 в случае поверхностей Ферма, который определяется как выпуклая оболочка однородных мономов степени d во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}^4_{\bar{k}}$ торическое многообразие $\mathbb{P}_\Delta$ совпадает (с точностью до бирациональной эквивалентности) с самим взвешенным проективным пространством $\mathbb{P}^4_{\bar{k}}$.

Торические многообразия зачастую бывают особыми (в частности, взвешенные проективные пространства). Торическое многообразие является особым, если для какого-то из его конусов порождающие его одномерные конусы не являются целочисленным базисом в пространстве всех целых точек конуса. Зачастую можно получить из особого многообразия неособое или менее особое раздутиями оставаясь в рамках торической геометрии. Торические раздутия задаются измельчениями веера, то есть добавлением в веер одномерных конусов и подразбиений конусов старших размерностей с помощью новых одомерных.

Зеркальная симметрия в подходе Батырева Построение зеркальных пар многообразий Калаби-Яу по Батыреву использует конструкцию торических многообразий через политопы. Пусть Δ будет *рефлексивным* политопом, то есть

1. его грани максимальной размерности лежат в гиперплоскостях вида $\sum_{i=1}^{n} v_i x_i = -1$, где все числа $v_i \in \mathbb{Z}$.

2. он содержит начало координат

Это техническое условие, которое выполняется почти во всех наших случаях. Тогда определим по нему *полярно двойственный* политоп ∇

$$\nabla := \{y \in (\mathbb{R}^4)^* \mid \forall x \in \Delta \ \langle x, y\rangle \geq -1\}. \tag{3.1.29}$$

Политоп ∇ также рефлексивен. Каждой k-мерной грани политопа Δ соответствует $n-k-1$-мерная грань политопа ∇ и наоборот. Полярно двойственный к ∇ оказывается снова политоп Δ. Более того, веер Σ_Δ "натягивается" на политоп ∇, то есть k-мерные конусы веера Σ_Δ получаются из $k-1$-мерных граней дуального политопа ∇ проведением лучей из начала координат во все точки грани. В частности, одномерные конусы получаются из вершин дуального политопа. То же самое верно для Σ_∇ и Δ.

Это наблюдение даёт рецепт построения разрешения особенностей $\tilde{\mathbb{P}}_\Delta \to \mathbb{P}_\Delta$ торического многообразия, которое не меняет сечения канонического расслоения дуального многообразия, то есть не меняет целочисленных точек политопа ∇. Рецепт заключается в том, чтобы подразбить веер Σ_Δ всеми целочисленными точками ∇. Такое разбиение обычно не единственно (на уровне конусов старших размерностей) и называется максимальным проективным крепантным (то есть сохраняющим канонический класс) разрешением.

Тогда утверждение Батырева заключается в том, что пара многообразий Калаби-Яу, определённых сечениями канонических расслоений (то есть уравнениями подходящей степени) в многообразиях $\tilde{\mathbb{P}}_\Delta$ и $\tilde{\mathbb{P}}_\nabla$ является зеркальной парой. В частности, Батырев [9] показал, что числа Ходжа этих многообразий удовлетворяют зеркальной симметрии.

Мы используем небольшую модификацию этой конструкции в нашем вычислении и проверке гипотезы [58], а также предъявим конкретные гиперповерхности и зеркальное отображение.

3.2 Зеркальная квинтика

Рассмотрим вновь уравнение квинтики $\mathcal{X}_\phi$ в $\mathbb{P}^4$, которое мы перепишем в несколько ином виде:

$$W(x, \phi) = \sum_{i=1}^{5} x_i^5 + \sum_{l=1}^{101} \phi_l e_l(x) = \sum_{i=1}^{106} C_a(\phi) \prod_{j=1}^{5} x_j^{v_{ij}}, \tag{3.2.1}$$

где мы ввели матрицу экспонент v_{ij}. Построим зеркальную квинтику как гиперповерхность в торическом многообразии. Вектора $v_{ij} = (v_{i1}, \ldots, v_{i5})$ задают (не все) целочисленные точки политопа проективного пространства Δ. Все эти точки лежат в $\mathbb{R}^4$ определённом условием $\sum_{j\le 5} v_{ij} = 5$ в $\mathbb{R}^5$. Воспользуемся тем, что точки политопа Δ можно интерпретировать, как вектора порождающие одномерные конусы дуального многообразия Σ_∇. Конструкция Батырева предписывает взять все целочисленные точки политопа Δ в качестве однмерных конусов $\Sigma := \Sigma_\nabla$. Мы же возьмём только точки, встречающиеся в формуле (3.2.1), а именно, рассмотрим веер $\{\tilde{v}_i\}_{i=1}^{106}$ получающийся из векторов

$$v_{ij} = \begin{cases} 5\delta_{i,j}, & 1 \le i \le 5, \\ s_{i-5,j}, & 6 \le i \le 106. \end{cases} \tag{3.2.2}$$

линейным преобразованием, при котором все $\tilde{v}_i$ оказываются несократимыми (явный вид этого преобразования не важен, поскольку мы интересуемся только линейными соотношеними между векторами). Веер, в котором $\tilde{v}_i$ являются одномерными конусами задаёт антиканоническое расслоение над многообразием $K \to \mathbb{P}_\nabla$, его сечениями являются полиномы, которые задают (возможно особые) многообразия Калаби-Яу.

Чтобы построить линейную калибровочную сигма модель нужно выбрать целочисленный базис линейных соотношений между векторами v_i:

$$\sum_{i\le 106} Q_{ai} v_i = 0. \tag{3.2.3}$$

Оказывается удобным выбрать рациональный базис в соотношениях вместо того, чтобы выбрать целочисленный. Но в таком базисе целочисленная решётка в алгебре Картана группы $U(1)^{101}$ будет иметь нестандартный вид.

Рациональный базис в соотношениях задаётся простой матрицей

$$\tilde{Q}_{ai} = \begin{cases} s_{ai}, & 1 \le i \le 5, \\ -5\delta_{i-5,a}, & 6 \le i \le 106. \end{cases} \tag{3.2.4}$$

Эти соотношения являются выражением того факта, что любой моном $x_1^{s_1} \cdots x_5^{s_5}$ является произведением мономов x_i^5 с коэффициетами имеющими знаменатель 5).

Эти соотношения не образуют целочисленного базиса в пространстве всех соотношений, то есть некоторые из целочисленных соотношений между v_i являются линейными комбинациями $\tilde{Q}_{ai}$ с рациональными коэффициентами. Рассмотрим, например, $s_2 = (3, 2, 0, 0, 0)$ и $s_3 = (2, 3, 0, 0, 0)$, которые соответствуют мономам $x_1^3 x_2^2$ и $x_1^2 x_2^3$. Тогда $\tilde{Q}_{2i} + \tilde{Q}_{3i} = (5, 5, 0, 0, 0, 0, -5, -5, 0, \ldots, 0)$ является линейной комбинацией векторов v_i сократимой на 5. Соотношение $(1, 1, 0, 0, 0, 0, -1, -1, 0, \ldots, 0)$ нельзя получить целочисленной комбинацией $\tilde{Q}_{ai}$. Несмотря на это, выбор $\tilde{Q}_{ai}$ в качестве "весов" для ЛКСМ очень удобен в вычислениях.

Как указывалось выше, такой выбор влияет на условие целочисленности в алгебре Картана для m_l из формулы (3.1.1). Условие целочисленности для m_l - это условие квантования магнитных потоков [13]. Чтобы выяснить условие квантования в базисе $\tilde{Q}_{al}$ допустим, что $\tilde{Q}_{al} = B_a^b Q_{bl}$, где Q_{bl} образуют целочисленный базис в соотношениях. Условие квантования записывается в виде

$$\sum_a \tilde{m}_a \tilde{Q}_{ai} = \sum_a m_a Q_{ai} \in \mathbb{Z}. \tag{3.2.5}$$

Поэтому при выборе $\tilde{Q}$ условие $m_l \in \mathbb{Z}$ перепишется в виде $\sum_a \tilde{m}_a \tilde{Q}_{ai} \in \mathbb{Z}$. Для упрощения обозначений в тексте ниже мы опустим тильду в $\tilde{m}_a$ и $\tilde{Q}_{ai}$.

Из формулы (3.2.4) видно, что $\sum_{i=1}^{106} Q_{ai} = 0$, что является отражением того, что пятимерное многообразие $K \to \mathbb{P}_\nabla$ является (некомпактным) многообразием Калаби-Яу, а значит [93] параметры Файе-Илиопулоса и тэта углы не перенормируются и аксиальная $U(1)$ симметрия ненарушена и на квантовом уровне. Таким образом r_l, θ_l остаются свободными параметрами квантовой теории.

Выпишем киральный суперпотенциал. Для этого разделим киральные поля согласно

$$\Phi_i = \begin{cases} S_i, & 1 \leq i \leq 5, \\ P_{i-5}, & 6 \leq i \leq 106. \end{cases} \tag{3.2.6}$$

Поле P_1 соответствует вектору $v_{6i} = (1,1,1,1,1)$. Оно является координатой вдоль антиканонического расслоения. Суперпотенциал задаётся формулой

$$W_Y := P_1\, G(S_1, \ldots, S_5; P_2, \ldots, P_{101}). \tag{3.2.7}$$

Немного пренебрегая аккуратностью, мы присваиваем полям R-заряды согласно $q_{P_1} = 2,\ q_{P_l} = 0,\ l > 1$ и $q_{S_i} = 0$. Полный $R-$заряд суперпотенциала равен 2, как требуется для сохранения симметрии. Потенциальный член скалярных полей компонентного Лагранжиана равняется

$$U(\boldsymbol{\phi}) = \sum_{l=1}^{101} \frac{e_l^2}{2} \left(\sum_{i=1}^{5} s_{li} |S_a|^2 - 5|P_l|^2 - r_l \right)^2 + \frac{1}{4} |G(S_1, \ldots, S_5; P_2, \ldots, P_{101})|^2 + \\ + \frac{1}{4}|P_1|^2 \sum_{i=1}^{5} \left| \frac{\partial G}{\partial S_i} \right|^2 + \frac{1}{4}|P_1|^2 \sum_{l=2}^{101} \left| \frac{\partial G}{\partial P_l} \right|^2 . \tag{3.2.8}$$

В зависимости от параметров Файе-Илиопулоса r_l такая калибровочная сигма модель будет иметь разные фазы. В частности, в геометрических фазах теория в инфракрасном пределе описывает нелинейную сигма модель в многообразие вакуумов

$$\sum_{i=1}^{5} s_{li}|S_a|^2-5|P_l|^2-r_l=0,\quad G(S_1,\dots,S_5;P_2,\dots,P_{101})=0,\;\; P_1=0 \quad (3.2.9)$$

по модулю $U(1)^{101}$.

$$Z_{S^2}=\sum_{m_l\in V}\int_{\mathcal{C}_1}\cdots\int_{\mathcal{C}_{101}}\prod_{l=1}^{101}\frac{d\tau_l}{(2\pi i)}\left(z_l^{-\tau_l+\frac{m_l}{2}}\bar{z}_l^{-\tau_l-\frac{m_l}{2}}\right)\times$$
$$\times\frac{\Gamma\big(1-5(\tau_1-\frac{m_1}{2})\big)}{\Gamma\big(5(\tau_1+\frac{m_1}{2})\big)}\prod_{a=1}^{5}\frac{\Gamma\big(\sum_l s_{la}(\tau_l-\frac{m_l}{2})\big)}{\Gamma\big(1-\sum_l s_{la}(\tau_l+\frac{m_l}{2})\big)}\prod_{l=2}^{101}\frac{\Gamma\big(-5(\tau_l-\frac{m_l}{2})\big)}{\Gamma\big(1+5(\tau_l+\frac{m_l}{2})\big)},\quad (3.2.10)$$

где

$$z_l:=e^{-(2\pi r_l+i\theta_l)}. \quad (3.2.11)$$

Контуры C проходят немного левее мнимых осей $\tau_l=-\epsilon+it_l$, что достигается небольшой положительной частью R-зарядов полей (кроме P_1). Набор V определён условием квантования в базисе Q_{ai}, то есть это набор всех m_l таких, что $\sum_{a\le 101} m_aQ_{ai}\in\mathbb{Z}$. Мы рассмотрим разложение интеграла при больших значениях $|z_l|$ для всех l, то есть для $r_l<<0$. Каждый из контуров C замыкается в правую полуплоскость высаживаясь на полюса в

$$5\left(\tau_l-\frac{m_l}{2}\right)-1=p_1,\; 5\left(\tau_l-\frac{m_l}{2}\right)=p_l;$$
$$p_1=1,2,\dots,\; p_l=0,1,\dots \quad \text{так что} \quad p_l+5m_l>0. \quad (3.2.12)$$

Удобно ввести обозначение $\bar{p}_l:=p_l+5m_l$. Тогда статсумма теории на сфере взятая по вычетам записывается как

$$Z_{S^2}=\pi^{-5}\sum_{p_1>0,p_l\ge 0}\sum_{\bar{p}_l\in\Sigma_p}\prod_l\frac{(-1)^{p_l}}{p_l!\bar{p}_l!}z_l^{-\frac{p_l}{5}}\bar{z}_l^{-\frac{\bar{p}_l}{5}}$$
$$\prod_{i=1}^{5}\Gamma\left(\frac{1}{5}\sum_{l=1}^{h}s_{li}p_l\right)\Gamma\left(\frac{1}{5}\sum_{l=1}^{h}s_{li}\bar{p}_l\right)\sin\left(\frac{\pi}{5}\sum_{l=1}^{h}s_{li}\bar{p}_l\right),\quad (3.2.13)$$

где набор Σ_p - это набор всех $\{\bar{p}_l\}$ таких, что $\sum_a(\bar{p}_a-p_a)Q_{ai}/5=\sum_a m_aQ_{ai}\in\mathbb{Z}$ как требуется условием квантования. Используя явную формулу (3.2.4) последнее условие переписывается в виде $\bar{p}_l\in\mathbb{Z}$ и $\sum_a(\bar{p}_a-p_a)s_{ai}\in 5\mathbb{Z}$. Замечая, также, что каждый член в (3.2.13) такой, что $\sum_{a=1}^{101}\bar{p}_as_{ai}=0 \bmod 5$ исчезает, мы заключаем, что сумма в (3.2.13) сводится к сумме по наборам

$$S_{\boldsymbol{a}}=\left\{p_l,\bar{p}_l\;:\;\sum_{l=1}^{101}s_{li}p_l\equiv\sum_{l=1}^{101}s_{li}\bar{p}_l\equiv a_i \ (\mathrm{mod}\ 5),\ 1\le a_i\le 4\right\}. \quad (3.2.14)$$

Наконец, используя равенство

$$\prod_{i=1}^{5} \sin\left(\frac{\pi}{5}\sum_{l=1}^{h} s_{li}\bar{p}_l\right) = (-1)^{|\boldsymbol{a}|}\prod_{i=1}^{5}\sin\left(\frac{\pi a_i}{5}\right)\prod_{l=1}^{h}(-1)^{\bar{p}_l}, \tag{3.2.15}$$

мы находим, что

$$Z_{S^2} = \sum_{\boldsymbol{a}}(-1)^{|\boldsymbol{a}|}\prod_{i=1}^{5}\frac{\Gamma\left(\frac{a_i}{5}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{a_i}{5}\right)}|\sigma_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{z})|^2, \tag{3.2.16}$$

где

$$\sigma_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{z}) = \sum_{n_i\geq 0}\prod_{i=1}^{5}\frac{\Gamma\left(\frac{a_i}{5}+n_i\right)}{\Gamma\left(\frac{a_i}{5}\right)}\sum_{\boldsymbol{p}\in S_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}}}\prod_{l=1}^{101}\frac{(-1)^{p_l}z_l^{-\frac{p_l}{5}}}{p_l!}. \tag{3.2.17}$$

Выражение для статсуммы Z_{S^2} (3.2.16) и (3.2.17) совпадает с экспонентой Кэлерова потенциала, вычисленной для пространства модулей квинтики в предыдущей главе (2.3.122) при зеркальном отображении (то есть связи комплексифицированных параметров Файе-Илиопулоса и деформаций комплексной структуры ϕ_a) заданном формулой

$$z_a = -\phi_l^{-5}. \tag{3.2.18}$$

В регионе $r_l << 0$, как и ожидалось, линейная калибровочная сигма модель находится в фазе Ландау-Гинзбурга. Вычисление сферической статсуммы воспроизводит Кэлеров потенциал пространства модулей комплексных деформаций квинтики в области орбифолдной точки. Стоит отдельно отметить простоту зеркального отображения по сравнению с "геометрическим" зеркальным отображением (2.3.124).

3.2.1 Гиперповерхности Ферма

Проведённое нами рассуждение несложно обобщается на случай гиперповерхностей типа Ферма. Действительно, используя результаты раздела 2.3.3 легко понять, как надо модифицировать рассуждение предыдущего раздела. Все рассуждения полностью повторяют случай квинтики, поэтому мы выпишем соответствующие формулы с минимальным набором комментариев.

Для гиперповерхности вида

$$W(x,\phi) = x_1^{d/k_1} + x_2^{d/k_2} + x_3^{d/k_3} + x_4^{d/k_4} + x_5^{d/k_5} + \sum_{s=1}^{h}\phi_s x_1^{s_1}\cdots x_5^{s_5} = 0. \tag{3.2.19}$$

мы определяем веер линейным преобразованием (явный вид которого нам не важен) веера натянутого на вектора

$$v_{ij} = \begin{cases} d\delta_{i,j}, & 1\leq i\leq 5,\\ k_j s_{i-5,j}, & 6\leq i\leq 106.\end{cases} \tag{3.2.20}$$

Как и в случае квинтики, вместо обсуждения конусов размерности 2 и выше мы построим сигма модель, а потом выберем конкретную фазу Ландау-Гинзбурга, в которой и проведём вычисление.

Рациональный базис в соотношениях между векторами v_i задаётся формулой

$$Q_{ai} = \begin{cases} k_i s_{ai}, & 1 \leq i \leq 5, \\ -d\delta_{i-5,a}, & 6 \leq i \leq h. \end{cases} \tag{3.2.21}$$

Этот базис не является целочисленным базисом в соотношениях, поэтому условие квантования магнитных потоков модифицируется. Вместо условия $m_l \in \mathbb{Z}$ мы имеем

$$\sum_a m_a Q_{ai} \in \mathbb{Z}. \tag{3.2.22}$$

Перегруппируем киральные поля теории

$$\Phi_i = \begin{cases} S_i, & 1 \leq i \leq 5, \\ P_{i-5}, & 6 \leq i \leq h+5. \end{cases} \tag{3.2.23}$$

Поле P_1 соответствует вектору $v_{6i} = (1,1,1,1,1)$. Оно является координатой вдоль антиканонического расслоения. Суперпотенциал задаётся формулой

$$W_Y := P_1 \, G(S_1, \dots, S_5; P_2, \dots, P_h). \tag{3.2.24}$$

Правило присвоения R-зарядов остаётся как и в случае квинтики $q_{P_1} = 2,\ q_{P_l} = 0,\ l > 1$ и $q_{S_i} = 0$.

Статсумма теории на сфере

$$Z_{S^2} = \sum_{m_l \in V} \int_{\mathcal{C}_1} \cdots \int_{\mathcal{C}_h} \prod_{l=1}^{h} \frac{d\tau_l}{(2\pi i)} \left(z_l^{-\tau_l + \frac{m_l}{2}} \bar{z}_l^{-\tau_l - \frac{m_l}{2}} \right) \times \\ \times \frac{\Gamma\big(1 - d(\tau_1 - \frac{m_1}{2})\big)}{\Gamma\big(d(\tau_1 + \frac{m_1}{2})\big)} \prod_{a=1}^{5} \frac{\Gamma\big(\sum_l k_a s_{la}(\tau_l - \frac{m_l}{2})\big)}{\Gamma\big(1 - \sum_l k_a s_{la}(\tau_l + \frac{m_l}{2})\big)} \prod_{l=2}^{h} \frac{\Gamma\big(-d(\tau_l - \frac{m_l}{2})\big)}{\Gamma\big(1 + d(\tau_l + \frac{m_l}{2})\big)}, \tag{3.2.25}$$

где

$$z_l := e^{-(2\pi r_l + i\theta_l)}. \tag{3.2.26}$$

Контуры C проходят немного левее мнимых осей $\tau_l = -\epsilon + it_l$. Набор V определён условием квантования в базисе Q_{ai}, то есть $m \in V \iff \sum_{a \leq h} m_a Q_{ai} \in \mathbb{Z}$. Как и в случае квинтики, фаза Ландау-Гинзбурга задаётся условием $|z_l| >> 0$ для всех l, или $r_l << 0$. Каждый из контуров C замыкается в правую полуплоскость высаживаясь на полюса в

$$d\left(\tau_l - \frac{m_l}{2}\right) - 1 = p_1,\ d\left(\tau_l - \frac{m_l}{2}\right) = p_l;$$
$$p_1 = 1, 2, \ldots,\ p_l = 0, 1, \ldots \quad \text{так что} \quad p_l + dm_l > 0. \quad (3.2.27)$$

Контуры интегрирования высаживаются на полюса первого порядка по каждой переменной, и статсумма теории на сфере взятая по вычетам в этих полюсах равняется

$$Z_{S^2} = \pi^{-5} \sum_{p_1>0, p_l\geq 0} \sum_{\bar{p}_l \in \Sigma_p} \prod_l \frac{(-1)^{p_l}}{p_l! \bar{p}_l!} z_l^{-\frac{p_l}{d}} \bar{z}_l^{-\frac{\bar{p}_l}{d}}$$
$$\prod_{i=1}^{5} \Gamma\left(\frac{1}{d}\sum_{l=1}^{h} k_i s_{li} p_l\right) \Gamma\left(\frac{1}{d}\sum_{l=1}^{h} k_i s_{li} \bar{p}_l\right) \sin\left(\frac{\pi}{d}\sum_{l=1}^{h} k_i s_{li} \bar{p}_l\right), \quad (3.2.28)$$

где набор Σ_p - это набор всех $\{\bar{p}_l\}$ таких, что $\sum_a (\bar{p}_a - p_a) Q_{ai}/d = \sum_a m_a Q_{ai} \in \mathbb{Z}$, то есть $\bar{p}_l \in \mathbb{Z}$ и $\sum_a (\bar{p}_a - p_a) s_{ai} k_i \in d\mathbb{Z}$. Замечая, также, что каждый член в (3.2.13) такой, что $\sum_{a=1}^{h} \bar{p}_a s_{ai} j_i = 0 \bmod d$ исчезает, мы заключаем, что сумма в (3.2.28) сводится к сумме по наборам

$$S_{\boldsymbol{a}} = \left\{ p_l, \bar{p}_l \ :\ \sum_{l=1}^{h} k_i s_{li} p_l \equiv \sum_{l=1}^{h} k_i s_{li} \bar{p}_l \equiv a_i \ (\mathrm{mod}\ d),\ 1 \leq a_i \leq d/k_i - 1 \right\}. \quad (3.2.29)$$

Упрощая произведение синусов с помощью формулы

$$\prod_{i=1}^{5} \sin\left(\frac{\pi}{d}\sum_{l=1}^{h} k_i s_{li} \bar{p}_l\right) = (-1)^{|\boldsymbol{a}|} \prod_{i=1}^{5} \sin\left(\frac{\pi k_i a_i}{d}\right) \prod_{l=1}^{h} (-1)^{\bar{p}_l}, \quad (3.2.30)$$

которая следует из (3.2.29), мы находим финальное выражение для статсуммы в случае гиперповерхностей Ферма

$$Z_{S^2} = \sum_{\boldsymbol{a}} (-1)^{|\boldsymbol{a}|} \prod_{i=1}^{5} \frac{\Gamma\left(\frac{k_i a_i}{d}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{k_i a_i}{d}\right)} |\sigma_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{z})|^2, \quad (3.2.31)$$

где

$$\sigma_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{z}) = \sum_{n_i \geq 0} \prod_{i=1}^{5} \frac{\Gamma\left(\frac{k_i a_i}{d} + n_i\right)}{\Gamma\left(\frac{k_i a_i}{d}\right)} \sum_{\boldsymbol{p} \in S_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}}} \prod_{l=1}^{h} \frac{(-1)^{p_l} z_l^{-\frac{p_l}{d}}}{p_l!}. \quad (3.2.32)$$

Эти формулы совпадают с формулами специлальной геометрии на пространстве модулей гиперповерхностей Ферма полученных в предыдущей главе (2.3.161) с точностью до общего коэффициента.

Зеркальное отображение задаётся формулой

$$z_a = -\phi_l^{-d}. \quad (3.2.33)$$

Сделаем комментарий касательно обратимых особенностей. Большая часть рассуждений этого раздела обобщается и на этот случай с сигма моделью определяемой “зарядами”

$$Q_{ai} = \begin{cases} M_{ij}^{-1} s_{aj}, & 1 \le i \le 5, \\ -\delta_{i-5,a}, & 6 \le i \le h. \end{cases} \tag{3.2.34}$$

Отличие от гиперповерхностей Ферма заключается в том, что в наибольшей общности часть полюсов в контурном интеграле будет иметь второй порядок, что является отражением появления логарифмов в периодах.

3.3 Заключение

В этой главе мы применили методы суперсимметричной локализации [13,36] и зеркальную симметрию [9], чтобы проверить зеркальный аналог гипотезы о статсумме линейных калибровочных сигма моделей сформулированную в [58]. Основной результат этой главы заключается в явном построении сигма модели зеркальной к данному многообразию типа Ферма $\mathcal{X}$, а также в совпадении статсуммы на сфере для этой сигма модели с экспонентой Кэлерова потенциала специальной геометрии на пространстве модулей исходной поверхности Ферма и явном построении зеркального отображения между комплексифицированными параметрами Файе-Илиопулоса сигма модели и комплексными модулями $\mathcal{X}$

$$e^{-K} \sim \int_{\mathcal{X}} \Omega_\phi \wedge \overline{\Omega_\phi}. \tag{3.3.1}$$

Помимо основного результата, мы можем использовать формулы, полученные с помощью локализации в качестве метода аналитического продолжения нашей формулы для специальной геометрии. У линейной калибровочной сигма модели имеются фазы, которые соотвествуют разным областям в пространстве параметров Файе-Илиопулоса r_l. В разных фазах контурный интеграл полученный локализацией приводит к различным разложениям Кэлерова потенциала. Такие разложения соответствуют разложениям вокруг ралчиных точек пространства комлексных модулей при зерклальном отображении. В дальнейшем, мы планируем использовать контурные интегралы такого типа для более полного описания геометрии пространств модулей комплексных и Кэлеровых структур.

Благодарности

В первую очередь автор хотел бы выразить глубокую благодарность своему научному руководителю, А. Белавину. Также автор выражает благодарность В Батыреву, Ф. Бенини, М. Берштейну, В. Васильеву, С. Галкину, А.

Герхардусу, Х. Иритани, Ш. Кацу, Ф. Кеведо, А. Клемму, А. Литвинову, А.Окунькову, К. Сайто, А. Танзини, К. Хори, Ш. Хосоно, Т. Хубшу и другим за различные беседы, дискуссии, комментарии и советы по теме диссертации. Автор выражает отдельную благодарность Б. Дубровину за многочисленные обсуждения и помощь.

Литература

[1] Konstantin Aleshkin and Alexander Belavin. A new approach for computing the geometry of the moduli spaces for a Calabi–Yau manifold. *J. Phys.*, A51(5):055403, 2018.

[2] Konstantin Aleshkin and Alexander Belavin. Exact Computation of the Special Geometry for Calabi–Yau Hypersurfaces of Fermat Type. *JETP Lett.*, 108(10):705–709, 2018.

[3] Konstantin Aleshkin and Alexander Belavin. Special geometry on the 101 dimesional moduli space of the quintic threefold. *JHEP*, 03:018, 2018.

[4] Konstantin Aleshkin and Alexander Belavin. Special geometry on the moduli space for the two-moduli non-Fermat Calabi–Yau. *Phys. Lett.*, B776:139–144, 2018.

[5] Konstantin Aleshkin, Alexander Belavin, and Alexey Litvinov. JKLMR conjecture and batyrev construction. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2019(3):034003, mar 2019.

[6] Carlo Angelantonj and Augusto Sagnotti. Open strings. *Phys. Rept.*, 371:1–150, 2002. [Erratum: Phys. Rept.376,no.6,407(2003)].

[7] Vladimir Arnold, Alexander Varchenko, and Sabir Gusein-Zade. *Singularities of Differentiable Maps*. Birkhauser Basel, 1985.

[8] Vijay Balasubramanian, Per Berglund, Joseph P. Conlon, and Fernando Quevedo. Systematics of moduli stabilisation in Calabi-Yau flux compactifications. *JHEP*, 03:007, 2005.

[9] Victor V. Batyrev. Dual Polyhedra and Mirror Symmetry for Calabi-Yau Hypersurfaces in Toric Varieties. *arXiv e-prints*, pages alg–geom/9310003, Oct 1993.

[10] Victor V. Batyrev and Lev A. Borisov. On Calabi-Yau complete intersections in toric varieties. 1994.

[11] A. A. Belavin, Alexander M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov. Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory. *Nucl. Phys.*, B241:333–380, 1984. [,605(1984)].

[12] Alexander Belavin and Lev Spodyneiko. N = 2 superconformal algebra in NSR string and Gepner approach to space-time supersymmetry in ten dimensions. 2015.

[13] Francesco Benini and Stefano Cremonesi. Partition Functions of $\mathcal{N} = (2,2)$ Gauge Theories on S^2 and Vortices. *Commun. Math. Phys.*, 334(3):1483–1527, 2015.

[14] Per Berglund and Tristan Hubsch. A Generalized Construction of Calabi-Yau Models and Mirror Symmetry. 2016.

[15] M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri, and C. Vafa. Kodaira-Spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes. *Commun. Math. Phys.*, 165:311–428, 1994.

[16] Ralph Blumenhagen, Daniel Klaewer, Lorenz Schlechter, and Florian Wolf. The refined swampland distance conjecture in calabi-yau moduli spaces. *Journal of High Energy Physics*, 2018(6):52, Jun 2018.

[17] Lev Borisov. Towards the Mirror Symmetry for Calabi-Yau Complete intersections in Gorenstein Toric Fano Varieties. *arXiv e-prints*, pages alg–geom/9310001, Oct 1993.

[18] Robert L. Bryant and Phillip A. Griffiths. *Some Observations on the Infinitesimal Period Relations for Regular Threefolds with Trivial Canonical Bundle*, pages 77–102. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.

[19] P. Candelas, G. T. Horowitz, A. Strominger, and E. Witten. Vacuum configurations for superstrings. *Nuclear Physics B*, 258:46–74, 1985.

[20] Philip Candelas and Xenia de la Ossa. Moduli Space of Calabi-Yau Manifolds. *Nucl. Phys.*, B355:455–481, 1991.

[21] Philip Candelas, Xenia De La Ossa, Anamaria Font, Sheldon H. Katz, and David R. Morrison. Mirror symmetry for two parameter models. 1. *Nucl. Phys.*, B416:481–538, 1994. [AMS/IP Stud. Adv. Math.1,483(1996)].

[22] Philip Candelas, Xenia de la Ossa, and Sheldon H. Katz. Mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in weighted P**4 and extensions of Landau-Ginzburg theory. *Nucl. Phys.*, B450:267–292, 1995.

[23] Philip Candelas, Xenia C. De La Ossa, Paul S. Green, and Linda Parkes. A Pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory. *Nucl. Phys.*, B359:21–74, 1991. [AMS/IP Stud. Adv. Math.9,31(1998)].

[24] Philip Candelas, Anamaria Font, Sheldon H. Katz, and David R. Morrison. Mirror symmetry for two parameter models. 2. *Nucl. Phys.*, B429:626–674, 1994.

[25] Philip Candelas, Paul S. Green, and Tristan Hubsch. Rolling Among Calabi-Yau Vacua. *Nucl. Phys.*, B330:49, 1990.

[26] S. Cecotti. N=2 Landau-Ginzburg versus Calabi-Yau sigma models: Nonperturbative aspects. *Int. J. Mod. Phys.*, A6:1749–1814, 1991.

[27] S. Cecotti, L. Girardello, and A. Pasquinucci. Singularity-Theory and N=2 Supersymmetry. *International Journal of Modern Physics A*, 6:2427–2496, 1991.

[28] Sergio Cecotti, Davide Gaiotto, and Cumrun Vafa. tt^* geometry in 3 and 4 dimensions. *JHEP*, 05:055, 2014.

[29] Sergio Cecotti and Cumrun Vafa. Topological antitopological fusion. *Nucl. Phys.*, B367:359–461, 1991.

[30] Alessandro Chiodo, Hiroshi Iritani, and Yongbin Ruan. Landau-Ginzburg/Calabi-Yau correspondence, global mirror symmetry and Orlov equivalence. 2012.

[31] Alessandro Chiodo, Hiroshi Iritani, and Yongbin Ruan. Landau-ginzburg/calabi-yau correspondence, global mirror symmetry and orlov equivalence. *Publications mathématiques de l'IHÉS*, 119(1):127–216, Jun 2014.

[32] Michele Cicoli, Denis Klevers, Sven Krippendorf, Christoph Mayrhofer, Fernando Quevedo, and Roberto Valandro. Explicit de Sitter Flux Vacua for Global String Models with Chiral Matter. *JHEP*, 05:001, 2014.

[33] Michele Cicoli, Denis Klevers, Sven Krippendorf, Christoph Mayrhofer, Fernando Quevedo, and Roberto Valandro. Explicit de Sitter Flux Vacua for Global String Models with Chiral Matter. *JHEP*, 05:001, 2014.

[34] D.A. Cox and S. Katz. *Mirror Symmetry and Algebraic Geometry.* Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society, 1999.

[35] Jacques Distler and Brian R. Greene. Some Exact Results on the Superpotential from Calabi-Yau Compactifications. *Nucl. Phys.*, B309:295–316, 1988.

[36] Nima Doroud, Jaume Gomis, Bruno Le Floch, and Sungjay Lee. Exact Results in D=2 Supersymmetric Gauge Theories. *JHEP*, 05:093, 2013.

[37] B. Dubrovin. Geometry and integrability of topological - antitopological fusion. *Commun. Math. Phys.*, 152:539–564, 1993.

[38] Huijun Fan, Tyler J. Jarvis, and Yongbin Ruan. The Witten equation and its virtual fundamental cycle. 2007.

[39] D. Friedan, E. Martinec, and S. Shenker. Conformal invariance, supersymmetry and string theory. *Nuclear Physics B*, 271:93–165, June 1986.

[40] Sergey Galkin and Hiroshi Iritani. Gamma conjecture via mirror symmetry. *arXiv e-prints*, page arXiv:1508.00719, Aug 2015.

[41] Doron Gepner. Exactly Solvable String Compactifications on Manifolds of SU(N) Holonomy. *Phys. Lett.*, B199:380–388, 1987.

[42] Doron Gepner. Exactly Solvable String Compactifications on Manifolds of SU(N) Holonomy. *Phys. Lett.*, B199:380–388, 1987.

[43] Efrat Gerchkovitz, Jaume Gomis, and Zohar Komargodski. Sphere Partition Functions and the Zamolodchikov Metric. *JHEP*, 11:001, 2014.

[44] Steven B. Giddings, Shamit Kachru, and Joseph Polchinski. Hierarchies from fluxes in string compactifications. *Phys. Rev.*, D66:106006, 2002.

[45] Alexander Givental. *A Mirror Theorem for Toric Complete Intersections*, pages 141–175. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1998.

[46] F. Gliozzi, J. Scherk, and D. Olive. Supersymmetry, supergravity theories and the dual spinor model. *Nuclear Physics B*, 122:253–290, April 1977.

[47] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of integrals, series, and products*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, seventh edition, 2007. Translated from the Russian, Translation edited and with a preface by Alan Jeffrey and Daniel Zwillinger, With one CD-ROM (Windows, Macintosh and UNIX).

[48] M. B. Green and J. H. Schwarz. Anomaly cancellations in supersymmetric D = 10 gauge theory and superstring theory. *Physics Letters B*, 149:117–122, December 1984.

[49] B.R. Greene and M.R. Plesser. Duality in calabi-yau moduli space. *Nuclear Physics B*, 338(1):15 – 37, 1990.

[50] Phillip A. Griffiths. Periods of integrals on algebraic manifolds: Summary of main results and discussion of open problems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 76(2):228–296, 03 1970.

[51] M. Gromov. Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds. *Inventiones mathematicae*, 82(2):307–347, Jun 1985.

[52] D. J. Gross, J. A. Harvey, E. Martinec, and R. Rohm. Heterotic string. *Physical Review Letters*, 54:502–505, February 1985.

[53] K. Hori, S. Katz, A. Klemm, R. Pandharipande, R. Thomas, C. Vafa, R. Vakil, and E. Zaslow. *Mirror symmetry*, volume 1 of *Clay mathematics monographs.* AMS, Providence, USA, 2003.

[54] Kentaro Hori and Cumrun Vafa. Mirror symmetry. 2000.

[55] Kazuo Hosomichi, Rak-Kyeong Seong, and Seiji Terashima. Supersymmetric Gauge Theories on the Five-Sphere. *Nucl. Phys.*, B865:376–396, 2012.

[56] Min-xin Huang, Albrecht Klemm, and Seth Quackenbush. Topological string theory on compact Calabi-Yau: Modularity and boundary conditions. *Lect. Notes Phys.*, 757:45–102, 2009.

[57] Hiroshi Iritani, Todor Milanov, Yongbin Ruan, and Yefeng Shen. Gromov-Witten Theory of Quotient of Fermat Calabi-Yau varieties. 2016.

[58] Hans Jockers, Vijay Kumar, Joshua M. Lapan, David R. Morrison, and Mauricio Romo. Two-Sphere Partition Functions and Gromov-Witten Invariants. *Commun. Math. Phys.*, 325:1139–1170, 2014.

[59] Shamit Kachru, Renata Kallosh, Andrei D. Linde, and Sandip P. Trivedi. De Sitter vacua in string theory. *Phys. Rev.*, D68:046005, 2003.

[60] Shamit Kachru, Renata Kallosh, Andrei D. Linde, and Sandip P. Trivedi. De Sitter vacua in string theory. *Phys. Rev.*, D68:046005, 2003.

[61] Anton Kapustin, Brian Willett, and Itamar Yaakov. Exact Results for Wilson Loops in Superconformal Chern-Simons Theories with Matter. *JHEP*, 03:089, 2010.

[62] Nicholas M. Katz and Tadao Oda. On the differentiation of de rham cohomology classes with respect to parameters. *J. Math. Kyoto Univ.*, 8(2):199–213, 1968.

[63] Albrecht Klemm and Stefan Theisen. Considerations of one modulus Calabi-Yau compactifications: Picard-Fuchs equations, Kahler potentials and mirror maps. *Nucl. Phys.*, B389:153–180, 1993.

[64] Albrecht Klemm and Stefan Theisen. Recent efforts in the computation of string couplings. *Theor. Math. Phys.*, 95:583–594, 1993. [Teor. Mat. Fiz.95,293(1993)].

[65] Maxim Kontsevich. Homological Algebra of Mirror Symmetry. 1994.

[66] Maxim Kontsevich and Don Zagier. Periods. pages 809–927. 01 2001.

[67] Marc Krawitz. *FJRW rings and Landau-Ginzburg mirror symmetry.* PhD thesis, University of Michigan, Jan 2010.

[68] Maximilian Kreuzer. The Mirror map for invertible LG models. *Phys. Lett.*, B328:312–318, 1994.

[69] Maximilian Kreuzer and Harald Skarke. On the classification of quasihomogeneous functions. *Commun. Math. Phys.*, 150:137, 1992.

[70] B. Lian, K. Liu, and S. T. Yau. Mirror Principle I. *arXiv e-prints*, pages alg–geom/9712011, Dec 1997.

[71] A. Losev. 'Hodge strings' and elements of K. Saito's theory of the primitive form. In *Topological field theory, primitive forms and related topics. Proceedings, 38th Taniguchi Symposium, Kyoto, Japan, December 9-13, 1996 and RIMS Symposium, Kyoto, Japan, December 16-19, 1996*, pages 305–335, 1998.

[72] Andrey Losev. Descendants constructed from matter field in landau-ginzburg theories coupled to topological gravity. *Theoretical and Mathematical Physics*, 95, 12 1992.

[73] A. Neveu and J. H. Schwarz. Tachyon-free dual model with a positive-intercept trajectory. *Physics Letters B*, 34:517–518, mar 1971.

[74] Masatoshi NOUMI. Expansion of the solutions of a gauss-manin system at a point of infinity. *Tokyo J. Math.*, 07(1):1–60, 06 1984.

[75] Hirosi Ooguri and Cumrun Vafa. On the Geometry of the String Landscape and the Swampland. *Nucl. Phys.*, B766:21–33, 2007.

[76] Vasily Pestun. Localization of gauge theory on a four-sphere and supersymmetric Wilson loops. *Commun. Math. Phys.*, 313:71–129, 2012.

[77] Frédéric Pham. La descente des cols par les onglets de lefschetz, avec vues sur gauss-manin. In *Systèmes différentiels et singularités*, number 130 in Astérisque, pages 11–47. Société mathématique de France, 1985.

[78] Alexander M. Polyakov. Quantum Geometry of Bosonic Strings. *Phys. Lett.*, B103:207–210, 1981. [,598(1981)].

[79] Alexander M. Polyakov. Quantum Geometry of Fermionic Strings. *Phys. Lett.*, B103:211–213, 1981. [,602(1981)].

[80] P. Ramond. Dual Theory for Free Fermions. *Physical Review D*, 3:2415–2418, may 1971.

[81] L. Randall and R. Sundrum. An Alternative to Compactification. *Physical Review Letters*, 83:4690–4693, December 1999.

[82] L. Randall and R. Sundrum. Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension. *Physical Review Letters*, 83:3370–3373, October 1999.

[83] Kyoji Saito. The higher residue pairings $K_F^{(k)}$ for a family of hypersurface singular points. *Singularities, Proc. of symp. in pure math*, 40.2:441–463, 1983.

[84] Kyoji Saito. On a linear structure of the quotient variety by a finite reflexion group. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 29(4):535–579, 1993.

[85] Chad Schoen. On fiber products of rational elliptic surfaces with section. *Mathematische Zeitschrift*, 197(2):177–199, Jun 1988.

[86] A. Strominger, S.-T. Yau, and E. Zaslow. Mirror symmetry is T-duality. *Nuclear Physics B*, 479:243–259, February 1996.

[87] Andrew Strominger. Special geometry. *Commun. Math. Phys.*, 133:163–180, 1990.

[88] L. Susskind. Harmonic-Oscillator Analogy for the Veneziano Model. *Physical Review Letters*, 23:545–547, sep 1969.

[89] G. Veneziano. Construction of a crossing-simmetric, Regge-behaved amplitude for linearly rising trajectories. *Nuovo Cimento A Serie*, 57:190–197, sep 1968.

[90] N. P. Warner. N=2 supersymmetric integrable models and topological field theories. In *Proceedings, Summer School in High-energy physics and cosmology: Trieste, Italy, June 15-July 31, 1992*, pages 0143–179, 1993.

[91] Edward Witten. On the Structure of the Topological Phase of Two-dimensional Gravity. *Nucl. Phys.*, B340:281–332, 1990.

[92] Edward Witten. Introduction to cohomological field theories. *Int. J. Mod. Phys.*, A6:2775–2792, 1991.

[93] Edward Witten. Phases of N=2 theories in two-dimensions. *Nucl. Phys.*, B403:159–222, 1993. [AMS/IP Stud. Adv. Math.1,143(1996)].

[94] Ю. И. Манин. Алгебраические кривые над полями с дифференцированием. *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 22(6):737–756, 1958.