Интегрируемые структуры в теории струн

Лев Сподынейко

Научно-Квалификационная Работа

Москва 2018

Введение

Основным предметом НКР является изучение интегрируемых систем и их приложений в теории струн. Работа состоит из двух примерно одинаковых по размеру частей.

Калаби-Яу

Первая часть рассматривает приложения топологической теории струн для изучения эффективной теории, компактифицированной на многообразие Калаби Яу.

Деформированные сигма-модели

Во второй части изучаются интегрируемые деформации нелинейных сигма моделей, который могут иметь применение в AdS/CFT соответствии.

Компактификация

Критическая размерность струны $d = 10$. Для того чтобы связать её с наблюдаемым миром нужно компактифициравать её до четырех измерений

$$R^{1,9} \to R^{1,3} \times M_6$$

$\mathcal{N} = 1$ суперсимметрия и уравнения Эйнштейна ведут к условию на M_6:

$$M_6 \text{ – многобразие Калаби Яу}$$

Топологическая теория

Многообразие Калаби Яу имеет модули (параметры решения). По теореме Голдстоуна должны быть безмассовые моды. Вычисление эффективного действия безмассовых мод основная проблем при компактификации.

Основное наблюдение

Оказывается, что из-за наличия суперсимметрии низкоэнергетическое эффетивное приближение во многом определяется топологическими свойствами многообразия Калаби-Яу, а не дифференциальными. В частности, для вычисления эффективного действия не требуется знать метрику на Калаби-Яу, а достаточно знать только некоторую топологическую информацию (и комплексную структуру), такую как числа Ходжа и числа пересечений циклов.

На мировом листе $N = 2$ суперконформная алгебра после твиста Виттэна приводит к топологической суперконформной теории. А юкавовские константы определяются структурными константами киральной алегбры.

Корреляционные фунции

Для вычисления корреляционных функций полей Φ_α и их суперпартнеров $\Phi_\alpha^{(1,1)} = G^-_{-1/2} G^+_{-1/2} \Phi_\alpha$ достаточно знать двухточку

$$\eta_{\alpha\beta} = \langle \Phi_\alpha \Phi_\beta \exp\left(\sum_{\lambda=1}^{M} s_\lambda \int \Phi_\lambda^{(1,1)} \, d^2 z \right) \rangle,$$

и возмущенную трехточку

$$C_{\alpha\beta\gamma}(s_1, \dots, s_M) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_\gamma \exp\left(\sum_{\lambda=1}^{M} s_\lambda \int \Phi_\lambda^{(1,1)} \, d^2 z \right) \rangle.$$

Можно показать, что $\eta_{\alpha\beta}$ невырожденная и s-независимая, а структурные константы $C_{\alpha\beta\gamma}(s)$ выражаются через предпотенциал $\mathcal{F}$

$$C_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial s_\alpha s_\beta s_\gamma}.$$

Используя тождества Уорда, можно показать, что $\eta_{\alpha\beta}$ и $C_{\alpha\beta\gamma}(s)$ обладают следующими свойствами

$$\partial_\delta C_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\alpha C_{\delta\beta\gamma} \ ,$$

$$C^{\rho}_{\alpha\beta} C^{\delta}_{\rho\gamma} = C^{\delta}_{\alpha\rho} C^{\rho}_{\beta\gamma} \ .$$

$$\partial_\alpha \eta_{\mu\nu} = 0 \ ,$$

$$C_{\mu\nu\lambda} = C_{\nu\mu\lambda} = C_{\nu\lambda\mu} \ .$$

Эти уравнения определяют структуру Фробениусового многообразия.

Аксиомы Дубровина

Параметры s_μ определяют специальный выбор *плоских координат* на многообразии модулей Калаби-Яу $\mathcal{M}$. Метрика $\eta^{\mu\nu}$ в этих координатах является постоянной. В произвольных координатах $t = \{t^\mu\}$ аксиомы Дубровина имеют вид

$$\nabla_\delta \widetilde{C}_{\alpha\beta\gamma} = \nabla_\alpha \widetilde{C}_{\delta\beta\gamma} \ ,$$

$$\widetilde{C}^\rho_{\alpha\beta} \widetilde{C}^\delta_{\rho\gamma} = \widetilde{C}^\delta_{\alpha\rho} \widetilde{C}^\rho_{\beta\gamma} \ .$$

$$\widetilde{C}_{\mu\nu\lambda} = \widetilde{C}_{\nu\mu\lambda} = \widetilde{C}_{\nu\lambda\mu} \ .$$

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma}[g_{\alpha\beta}] = 0 \ ,$$

где ∇_μ – ковариантная производная, $R_{\mu\nu\lambda\sigma}$ – тензор Римана и струтурные константы обозначаются как $\widetilde{C}^\gamma_{\alpha\beta}(t)$.

Выражение для плоских координат

Недавно было предложено следующее выражения для плоских координат

$$s_\mu(t) = \sum_{m_\alpha \in \Sigma_\mu} \left(\int_{\gamma_\mu} \exp(W_0(x)) \prod_\alpha e_\alpha^{m_\alpha} \Omega(x,t) \right) \prod_\alpha \frac{t_\alpha^{m_\alpha}}{m_\alpha!},$$

где Σ_μ определяются требование равенства размерностей левой и правой частей равенства.

Циклы γ_μ образуют базис гомологий $H_n(\mathbb{C}^n, \operatorname{Re} W_0 = -\infty)$, которые определяются как $\lim_{L\to+\infty} H_n(\mathbb{C}^n / \{\operatorname{Re} W_0 \le -L\})$

Мы зафиксируем нормировку координат требованием, чтобы $s_\mu = t_\mu + \dots$.

$$
\begin{aligned}
s_{15} &= t_{15} - (r_{1,14} + r_{2,15})t_{14}t_{15}, \\
s_{14} &= t_{14} - r_{1,14}t_{14}^2 - r_{2,15}t_{13}t_{15} - r_{2,15}t_{12}t_{15}, \\
s_{13} &= t_{13} + (3 - r_{1,14})t_{13}t_{14} + (3 - r_{2,15})t_{11}t_{15} - r_{2,15}t_{10}t_{15}, \\
s_{12} &= t_{12} - r_{1,14}t_{12}t_{14} - r_{2,15}t_{10}t_{15}, \\
s_{11} &= t_{11} + t_{13}^2 + 2t_{12}t_{13} + (2 - r_{1,14})t_{11}t_{14} + 2t_{10}t_{14} \\
&\quad - r_{2,15}t_9t_{15} + (2 - r_{2,15})t_8t_{15}, \\
s_{10} &= t_{10} + \frac{3t_{13}^2}{2} + 3t_{11}t_{14} - r_{1,14}t_{10}t_{14} + 3t_9t_{15} \\
&\quad - r_{2,15}t_8t_{15} - r_{2,15}t_7t_{15}, \\
s_9 &= t_9 + t_{11}t_{13} + t_{10}t_{13} + t_{10}t_{12} - r_{1,14}t_9t_{14} + t_8t_{14} + t_7t_{14} \\
&\quad - r_{2,15}t_6t_{15} + t_5t_{15}, \\
s_8 &= t_8 + 2t_{11}t_{13} + 2t_{11}t_{12} + 2t_{10}t_{13} + 2t_9t_{14} + (2 - r_{1,14})t_8t_{14} \\
&\quad + (2 - r_{2,15})t_6t_{15} - r_{2,15}t_5t_{15}, \\
s_7 &= t_7 + 3t_{11}t_{13} + 3t_9t_{14} - r_{1,14}t_7t_{14} - r_{2,15}t_5t_{15},
\end{aligned}
$$

Во второй части работы изучаются деформированные сигма модели. В частности мы предложили дуальное описанние к этим моделям, дающие описанние теории в сильной связи.

Дуальная теорию удобно понимать как некоторое обобщение моделей Тоды

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi}(\partial_\mu \varphi)^2 + \Lambda \sum_{r=1}^{N} e^{(\boldsymbol{\alpha}_r, \varphi)}, \qquad (1)$$

Далее мы будем искать среди этих теории интегрируемые теории. Это накладывает множество ограничений на скрининги. Решения существуют только для очень специальных наборов. Один из таких наборов связан с классическими алгебрами Ли, и соответствует моделям Тоды. Однако помимо этого существуют и другие решения, которые, в некотором смысле, связаны с супералгебрами Ли и являются чисто квантовыми.

Существует теория обладающая O(N) симметрией, в которых первый интеграл движения имеет ток спина 4. Теория рассеяния частиц этой теории задается тригонометрической деформацией O(N) R-матрицы.

$$S^{++}_{++}(\theta) = \frac{\sinh\lambda(\theta - i\pi)}{\sinh\lambda(\theta + i\pi)}, \quad S^{+0}_{+0} = \frac{\sinh\lambda\theta}{\sinh\lambda(\theta - 2i\pi)} S^{++}_{++}(\theta),$$

$$S^{00}_{00}(\theta) = S^{+0}_{+0}(\theta) + S^{+-}_{-+}(\theta), S^{+-}_{-+}(\theta) = -\frac{\sin\pi\lambda\sin 2\pi\lambda}{\sinh\lambda(\theta - 2i\pi)\sinh\lambda(\theta + i\pi)},$$

$$S^{0+}_{+0} = -\frac{i\sin 2\pi\lambda}{\sinh\lambda(\theta - 2i\pi)} S^{++}_{++}(\theta),$$

Со стороны модели Тоды связь с сигма-моделью можно увидеть, заметив, что ток спина 4 коммутирует не только со экспоненциальными скринигами, но и со скринигами с предэкспонентами

$$\oint_{\mathcal{C}_z} G_{2k}(z) e^{(\boldsymbol{\alpha}_r, \varphi(w))} dw = \partial_z \mathcal{V}_k^{(r)}(z), \tag{2}$$

Используя аналогию с теорией струн, где вертексные операторы с предэкспонентами отвечают гравитонам, можно попробывать найти нелинейное возмущение отвечающие эти скрнингам (которые отвечают первому линейному члену этого возмущения). Технически это отвечает доопределению неперенормируемой теории до перенормированной специальными выбром неперенормуруемых членов. Это можно сделать в этом случае и результирующая теории в действительности является деформированной сигма моделью

Заключение

В данной работе были получены следующие результаты

1. Найдено выражение для плоских координат в модели Казамы-Сузуки
2. Предложено дуальное описание диформированных сигма-моделей с $O(N)$-симметрией.

НКР основана на следующих работах, выполненных в соавторстве с А.А. Белавиным и А.В. Литвиновым. Автор внес существенный вклад в написание этих работ.

1. A. Litvinov, L. Spodyneiko, On W algebras commuting with a set of screenings, J. High Energy Phys., 1611, 138 (2016); arXiv:1609.06271, WoS: 000388988600004, Scopus: 2-s2.0-84996836494.
2. A. Belavin, L. Spodyneiko, Flat structures on Frobenius Manifolds in the case of irrelevant deformations, J. Phys. A 49, 495401 (2016); arXiv:1608.02284, WoS: 000388726100001, Scopus: 2-s2.0-84999663752.
3. А.А. Белавин, Л.А. Сподынейко, Пространственно-временная суперсимметрия в десятимерной теории струн в подходе Гепнера, ТМФ, 185(2), 329-345 (2015), WoS: 000366113400006, Scopus: 2-s2.0-84949220667.
4. A. Litvinov, L. Spodyneiko, On dual description of the deformed $O(N)$ sigma model, готовится к печати